ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 3-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα μπαίνουμε στο κεφάλαιο για τα όρια συναρτήσεων. Εδώ θα κάνουμε μια σχετικά σύντομη επισκόπηση της έννοιας του ορίου συνάρτησης, τονίζοντας απλώς κάποια "λεπτά" σημεία, διότι η έννοια αυτή έχει διδαχθεί σε προηγούμενο μάθημα απειροστικού λογισμού. Για διεξοδικότερη διαπραγμάτευση με όλες τις λεπτομέρειες και με πολλά παραδείγματα δείτε τις ενότητες 3.1 και 3.2 του βιβλίου.

Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f\,:\,A\to\mathbb{R}$$

όπου το πεδίο ορισμού A της f είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$$

όταν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο κατάλληλο $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ με $0<|x-\xi|<\delta$. Με άλλα λόγια, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$x\in A, 0<|x-\xi|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-\eta|<\epsilon. \tag{1}$$

Όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν ισχύει το παραπάνω όριο, παίρνουμε έναν τυχόντα $\epsilon>0$ και προσπαθούμε να βρούμε έναν κατάλληλο $\delta>0$ ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

$$|f(x)-\eta|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad \cdots \quad \Leftarrow \quad \cdots\cdots \quad \Leftarrow \quad \cdots \quad \Leftarrow \quad 0<|x-\xi|<\delta.$$

Αρχίζουμε δηλαδή από την σχέση $|f(x)-\eta|<\epsilon$, που θέλουμε να ισχύει, και μεταβαίνουμε σε απλούστερες σχέσεις, προσέχοντας ώστε κάθε επόμενη σχέση να συνεπάγεται την προηγούμενη, και καταλήγοντας στην τελική σχέση $0<|x-\xi|<\delta$. Σε κάθε στάδιο της διαδικασίας πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού A της f. Αυτή είναι η διαδικασία που ακολουθούσαμε στην περίπτωση του ορίου ακολουθίας, όπου από τον τυχόντα $\epsilon>0$ βρίσκαμε έναν κατάλληλο n_0.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε το όριο

$$\lim_{x\to 1}(3x+4)=7.$$

Έστω $\epsilon>0$. Πρέπει να βρούμε έναν κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-1|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |(3x+4)-7|<\epsilon.$$

Κάνουμε το εξής:

$$|(3x+4)-7|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad |3x-3|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad |x-1|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Οπότε αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0<\delta\le\frac{\epsilon}{3},$$

τότε θα έχουμε ότι

$$0<|x-1|<\delta \quad \Rightarrow \quad |x-1|<\frac{\epsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad |3x-3|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad |(3x+4)-7|<\epsilon$$

ή, πιο σύντομα,

$$0<|x-1|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |(3x+4)-7|<\epsilon.$$

Ο ορισμός του ορίου

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \eta$$

είναι ανάλογος: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο κατάλληλο $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$. Ισοδύναμα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε

$$x \in A, x > N \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \epsilon. \tag{2}$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε το N από το ϵ είναι εντελώς ανάλογη της προηγούμενης (για να βρούμε το δ από το ϵ).

Υπάρχουν εννέα περιπτώσεις ορίου, ανάλογα με το αν το x τείνει σε αριθμό ξ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και αν το όριο του $f(x)$ είναι αριθμός η ή $+\infty$ ή $-\infty$. Όσον αφορά στο x οι αντίστοιχες ανισότητες είναι $0 < |x - \xi| < \delta$ ή $x > N$ ή $x < -N$ και όσον αφορά στο $f(x)$ οι αντίστοιχες ανισότητες είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ ή $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$. Κάθε φορά θεωρούμε δεδομένο τον τυχόντα $\epsilon > 0$ ή τον $M > 0$ και ψάχνουμε να βρούμε τον κατάλληλο $\delta > 0$ ή τον $N > 0$ ώστε να ισχύει μια συνεπαγωγή όπως οι παραπάνω (1) και (2).

Τώρα θα τονίσω ότι, όπως και στην περίπτωση του ορίου ακολουθίας, μπορούμε να διατυπώσουμε με την ίδια ενιαία μορφή τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις *περιοχές* των σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$. Θυμόμαστε ότι οι περιοχές των σημείων $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι οι

$$N_\eta(\epsilon) = \begin{cases} (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon), & \text{αν } \eta \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{\epsilon}, +\infty], & \text{αν } \eta = +\infty \\ [-\infty, -\frac{1}{\epsilon}), & \text{αν } \eta = -\infty \end{cases}$$

$$N_\xi(\delta) = \begin{cases} (\xi - \delta, \xi + \delta), & \text{αν } \xi \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{\delta}, +\infty], & \text{αν } \xi = +\infty \\ [-\infty, -\frac{1}{\delta}), & \text{αν } \xi = -\infty \end{cases}$$

Συνηθίζουμε να γράφουμε $M = \frac{1}{\epsilon}$ και $N = \frac{1}{\delta}$, οπότε το να είναι οι M, N μεγάλοι ισοδυναμεί με το να είναι οι αντίστοιχοι ϵ, δ μικροί.

Τώρα η ενιαία διατύπωση του ορισμού του ορίου

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$$

είναι: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, x \in N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in N_\eta(\epsilon).$$

Και τώρα ερχόμαστε να θίξουμε ένα λεπτό σημείο της έννοιας του ορίου.

Το όριο

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{x}$$

δεν έχει νόημα. Ο λόγος είναι ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt{x}$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$ και το x, το οποίο είναι υποχρεωμένο να βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δεν μπορεί να πλησιάσει τον αριθμό -1. Πράγματι, υπάρχει κάποια περιοχή του -1 η οποία δεν περιέχει κανένα x από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για να έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x \to \xi} \sqrt{x}$$

πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ κινούμενος μέσα στο πεδίο ορισμού της $\sqrt{x}$. Είναι προφανές ότι αυτό μπορεί να γίνει αν το ξ είναι οποιοδήποτε σημείο του $[0,+\infty]$ (συμπεριλαμβανομένου του $+\infty$) και ότι δεν μπορεί να γίνει αν ο ξ είναι στο $[-\infty,0)$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το όριο

$$\lim_{x\to\xi}\sqrt{x(x-1)}.$$

Τώρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ και για να έχει νόημα το όριο πρέπει ο ξ να βρίσκεται στην ένωση $[-\infty,0]\cup[1,+\infty]$. Αν ο ξ ανήκει στο διάστημα $(0,1)$, το όριο δεν έχει νόημα.

Άλλο παράδειγμα είναι το

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ και για να έχει νόημα το όριο πρέπει ο ξ να βρίσκεται, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, στην ένωση $[-\infty,0]\cup[1,+\infty]$. Αν ο ξ ανήκει στο διάστημα $(0,1)$, το όριο δεν έχει νόημα.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ πρέπει ο x να μπορεί να πλησιάσει το ξ κινούμενος μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και, επομένως, πρέπει ο ξ να βρίσκεται σε κατάλληλη θέση σε σχέση με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Όπως είδαμε στα συγκεκριμένα παραδείγματα, όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι μια ένωση πεπερασμένων διαστημάτων, τότε οι επιτρεπτές θέσεις του ξ είναι στην ένωση των ίδιων διαστημάτων αφού επισυνάψουμε σ' αυτά και τα άκρα τους.

Ας δούμε, όμως, και ένα λίγο πιο περίπλοκο παράδειγμα. Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to0}\sqrt{x\sin\frac{1}{x}}.$$

Έχει νόημα αυτό το όριο; Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης λύνουμε την ανίσωση

$$x\sin\frac{1}{x}\geq0$$

και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι μια ένωση άπειρων διαστημάτων:

$$A=\Big(-\infty,-\frac{1}{\pi}\Big]\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[-\frac{1}{2n\pi},-\frac{1}{(2n+1)\pi}\Big]\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\Big]\cup\Big[\frac{1}{\pi},+\infty\Big).$$

Το σύνολο A βρίσκεται και στις δυο μεριές του 0 και αποτελείται από άπειρα συμμετρικά ως προς το 0 διαστήματα τα οποία προσεγγίζουν το 0. Δηλαδή, ο x μπορεί να πλησιάσει το 0 μέσα από το A και, επομένως, έχει νόημα το συγκεκριμένο όριο. Λίγο πιο μετά θα δούμε πολύ εύκολα ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0. Παρατηρήστε ότι εκτός από τα άπειρα διαστήματα στα οποία είναι ορισμένη η συνάρτηση $\sqrt{x\sin\frac{1}{x}}$, *υπάρχουν και άπειρα άλλα συμπληρωματικά διαστήματα και στις δυο μεριές του 0 τα οποία επίσης προσεγγίζουν το 0 και στα οποία δεν είναι ορισμένη η συνάρτηση. Τα διαστήματα ορισμού και τα διαστήματα μη-ορισμού της συνάρτησης εναλλάσσονται διαρκώς πλησιάζοντας το 0 και από τις δυο μεριές του και, επομένως, δεν υπάρχει κανένα διάστημα με άκρο τον 0, είτε δεξιά είτε αριστερά του 0, στο οποίο να είναι ορισμένη η συνάρτηση.*

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όταν αναφερόμαστε στο όριο $\lim_{x\to\xi}f(x)$ εννοούμε ότι ο x πλησιάζει το ξ αλλά δεν επιτρέπεται να γίνει ακριβώς ίσος με ξ.

Αυτό φαίνεται και στην ανισότητα $0 < |x - \xi| < \delta$ που αναφέρεται στον ορισμό του ορίου. Άρα πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ μέσα από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά, στην περίπτωση που το ίδιο το ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού, πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ αποφεύγοντας να συμπέσει με το ξ.

Για παράδειγμα, το όριο

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2(x-1)}$$

δεν έχει νόημα. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $\{0\} \cup [1, +\infty)$ και από τη στιγμή που ο x πρέπει να κινείται μέσα στο πεδίο ορισμού και να αποφεύγει να συμπέσει με το 0 είναι υποχρεωμένος να πλησιάσει το 0 μέσα από το $[1, +\infty)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο. Εδώ το πρόβλημα είναι ότι υπάρχει μια περιοχή του 0 η οποία περιέχει μόνο το ίδιο το 0 από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Και τώρα θα κωδικοποιήσουμε με έναν ορισμό τις περιπτώσεις που έχει νόημα το $\lim_{x \to \xi} f(x)$.

Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν *κάθε* περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A διαφορετικό από το ίδιο το ξ. Με απλοϊκά λόγια, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν μπορούμε να πλησιάσουμε το ξ με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Με σύμβολα:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{ώστε} \quad x \in N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\}.$$

Δηλαδή, σύμφωνα με όσα είπαμε μέχρι τώρα, το όριο $\lim_{x \to \xi} f(x)$ έχει νόημα ακριβώς όταν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Όπως είδαμε στο τελευταίο παράδειγμα, υπάρχει περίπτωση να ανήκει το ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά να μην μπορούμε να το πλησιάσουμε με σημεία x του πεδίου ορισμού διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν το ξ είναι *μεμονωμένο σημείο* του πεδίου ορισμού.

Γενικότερα, λέμε ότι το ξ είναι **μεμονωμένο σημείο** του συνόλου A αν *υπάρχει* μια περιοχή του ξ η οποία περιέχει μόνο το στοιχείο ξ από το A.

Για παράδειγμα, το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του $\{0\} \cup [1, +\infty)$.