# ΑΝΑΛΥΣΗ 1

## ΕΝΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 31-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Θ αρχίσουμε με δύο σχόλια σχετικά με τις απροσδιόριστες μορφές.

*Σχόλιο 1:* Στις περιπτώσεις που προκύπτει απροσδιόριστη μορφή *δεν* συνεπάγεται αυτομάτως ότι δεν υπάρχει το όριο που θέλουμε να υπολογίσουμε. Το μόνο που μπορούμε να πούμε σε τέτοια περίπτωση είναι ότι το όριο μπορεί να μην υπάρχει αλλά μπορεί και να υπάρχει και τότε πρέπει να το βρούμε με άλλον τρόπο και όχι με αυτόν που μας οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n)$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα διαφοράς, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

$$(+\infty)-(+\infty)$$

διότι $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Άρα το όριο, *αν υπάρχει*, δεν υπολογίζεται με τον κανόνα διαφοράς.
Μπορούμε, όμως, να γράψουμε

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n) = \lim_{n\to+\infty} n(n-1)$$

και να εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου. Πράγματι, έχουμε $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n) = \lim_{n\to+\infty} n \lim_{n\to+\infty}(n-1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

*Σχόλιο 2:* Ας πούμε δυο λόγια για την απροσδιόριστη μορφή

$$\frac{1}{0}.$$

Κατ' αρχάς ας σκεφτούμε *γιατί* η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Αυτό συμβαίνει διότι, αν έχουμε μια μεταβλητή ποσότητα, για παράδειγμα τον $n$-οστό όρο μιας ακολουθίας, η οποία πλησιάζει τον $0$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε με γενικό και ενιαίο τρόπο τί θα κάνει η αντίστροφη ποσότητα.
Δείτε για παράδειγμα την ακολουθία

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$x_n \to 0$$

αλλά η αντίστροφη ακολουθία είναι η

$$\frac{1}{x_n} = \frac{n}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1}n$$

και αυτή δεν έχει όριο, διότι έχει άπειρους όρους $\leq -1$ και άπειρους όρους $\geq 1$.
Γενικότερα, όταν μια μεταβλητή ποσότητα πλησιάζει τον $0$ και παίρνει τιμές μικρές σε μέγεθος αλλά με εναλλασόμενα πρόσημα, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα παίρνει τιμές μεγάλες σε μέγεθος αλλά με εναλλασόμενα πρόσημα με αποτέλεσμα *κάποιες* τιμές αυτής της αντίστροφης ποσότητας να απομακρύνονται προς το $+\infty$ και

*κάποιες* άλλες τιμές της να απομακρύνονται προς το $-\infty$, οπότε η αντίστροφη ποσότητα ούτε πλησιάζει κάποιον αριθμό ούτε απομακρύνεται προς το $+\infty$ ούτε απομακρύνεται προς το $-\infty$.
Τώρα, αν μια ακολουθία δεν έχει όρους με εναλλασόμενα πρόσημα και έχει όριο $0$, μπορούμε να έχουμε γενικό συμπέρασμα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε $n$ και $x_n \to 0$.*

*Αν ισχύει τελικά $x_n > 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.*

*Αν ισχύει τελικά $x_n < 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$.*

Αυτό είναι το μέρος [δ] της Πρότασης 2.11 του βιβλίου. Δείτε εκεί την απόδειξη. Πάντως, μπορούμε να καταλάβουμε ότι, αν μια μεταβλητή ποσότητα έχει μικρές θετικές τιμές, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα έχει μεγάλες θετικές τιμές και ότι, αν μια μεταβλητή ποσότητα έχει μικρές αρνητικές τιμές, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα έχει μεγάλες αρνητικές τιμές.
Έχουμε και τον ανάλογο μνημονικό κανόνα:

$$\frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Και τώρα ερχόμαστε σε ένα πολύ σημαντικό Θεώρημα, το Θεώρημα 2.1 του βιβλίου. Με βάση αυτό το Θεώρημα μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να αποφασίζουμε αν μια ακολουθία έχει όριο χωρίς να την συγκρίνουμε με κάποια άλλη ακολουθία (την οποία πρέπει να φαντασθούμε) και χωρίς να χρειαστεί να την "σπάσουμε" σε απλούστερες ακολουθίες (οπότε πρέπει να φαντασθούμε και τις απλούστερες ακολουθίες αλλά και τον τρόπο του "σπασίματος"). Το Θεώρημα μας λέει ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ελέγξουμε αν η ακολουθία είναι μονότονη ή όχι: αν είναι μονότονη τότε έχει οπωσδήποτε όριο. Το να ελέγξουμε αν μια ακολουθία $(x_n)$ είναι μονότονη ή όχι είναι σε πάρα πολλές περιπτώσεις εύκολο: έχουμε μόνο να εξετάσουμε την ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ και να δούμε αν αυτή (ή η αντίθετή της) ισχύει για κάθε $n$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο.*

[α] *Αν η $(x_n)$ είναι αύξουσα, τότε έχει όριο το οποίο είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Ειδικώτερα, αν η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει όριο $+\infty$ και, αν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει όριο αριθμό. Και στις δυο περιπτώσεις το όριο της $(x_n)$ ισούται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

[β] *Αν η $(x_n)$ είναι φθίνουσα, τότε έχει όριο το οποίο είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$. Ειδικώτερα, αν η $(x_n)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει όριο $-\infty$ και, αν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει όριο αριθμό. Και στις δυο περιπτώσεις το όριο της $(x_n)$ ισούται με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

*Απόδειξη.* [α] Υποθέτουμε ότι η $(x_n)$ είναι αύξουσα.
*Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.*
Τώρα πρέπει να κατανοήσουμε κάτι βασικό σχετικά με τη φύση αυτού του Θεωρήματος. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η $(x_n)$ έχει όριο αλλά δεν έχουμε καμιά ιδέα για το ποιό

περιμένουμε να είναι το όριό της. Αν μπορούσαμε να φαντασθούμε κάποιο υποψήφιο όριο $x$, τότε για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θα ακολουθούσαμε την γνωστή διαδικασία του ορισμού του ορίου: θα θεωρούσαμε $\epsilon > 0$ και θα ασχολιόμασταν με το να αποδείξουμε ότι η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ ισχύει από κάποιον $n$ και πέρα (εύρεση του $n_0$). Ή, αν το $x$ δεν ήταν αριθμός αλλά ήταν $+\infty$, θα θεωρούσαμε $M > 0$ και θα μελετούσαμε με παρόμοιο τρόπο (εύρεση του $n_0$) την ανισότητα $x_n > M$. Άρα πρέπει πρώτα να υποψιασθούμε το υποψήφιο όριο της $(x_n)$.
Για να το κάνουμε αυτό ζωγραφίζουμε πρόχειρα τους όρους της $(x_n)$ προσπαθώντας να καταλάβουμε πώς αυτοί "κινούνται" πάνω στην ευθεία. Και αυθόρμητα ξεχωρίζουμε δυο βασικές περιπτώσεις: *η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη και η $(x_n)$ είναι άνω φραγμένη.*
*Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών.*
$(i)$ Έστω ότι η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη.
Σ' αυτήν την περίπτωση το σχήμα είναι περίπου:


(Φανταστείτε την ακολουθία $(n)$ ή την $(2^n)$.)
Είναι νομίζω εύλογο να αναγνωρίσουμε ως υποψήφιο όριο της $(x_n)$ το $+\infty$. Σκεφτόμαστε μάλιστα ότι, επειδή η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, το σύνολο των όρων της

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

δεν είναι ούτε αυτό άνω φραγμένο, οπότε το supremum του είναι εξ ορισμού $+\infty$.
Αν, λοιπόν, αποδείξουμε ότι

$$x_n \to +\infty,$$

τότε αφ' ενός θα έχουμε αποδείξει ότι η $(x_n)$ έχει όριο $+\infty$ αφ' ετέρου θα έχουμε αποδείξει και ότι το όριο της $(x_n)$ ταυτίζεται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη στην πρώτη περίπτωση.
Επομένως, έστω $M > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n > M$ από κάποιον $n_0$ και πέρα.
*Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.*
Σκεφτόμαστε τώρα κάτι σημαντικό: *είναι αρκετό να βρούμε έστω και έναν $n_0$ με την ιδιότητα $x_{n_0} > M$.* Διότι, αν ισχύει $x_{n_0} > M$, τότε, ΕΠΕΙΔΗ Η $(x_n)$ ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ, θα ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή θα ισχύει τελικά $x_n > M$ και θα τελειώσει η απόδειξη. Και γιατί αναμένουμε ότι θα ισχύει $x_{n_0} > M$ έστω για έναν $n_0$; Μα διότι η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε κάποιος όρος της πρέπει να είναι $> M$ (αλλιώς ο $M$ θα ήταν άνω φράγμα της $(x_n)$).
*Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και πάμε στην απόδειξη.*
Έστω $M > 0$. Επειδή η $(x_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει κάποιος όρος της ο οποίος είναι $> M$. Δηλαδή υπάρχει $n_0$ ώστε

$$x_{n_0} > M.$$

Επειδή η $(x_n)$ είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$. Άρα $x_n \to +\infty$.
$(ii)$ Έστω ότι η $(x_n)$ είναι άνω φραγμένη.
Τώρα το σχήμα είναι περίπου:


Ο $u$ είναι κάποιο άνω φράγμα της $(x_n)$ και όλοι οι όροι της $(x_n)$ είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του $u$.
Πάλι είναι εύλογο ότι οι όροι της $(x_n)$ καθώς κινούνται προς τα δεξιά χωρίς να ξεπερνούν τον $u$ "συσσωρεύονται" σε κάποιο σημείο $x$ το οποίο πρέπει να είναι κι αυτό αριστερά (με την ευρεία έννοια) του $u$.
(Φαντασθείτε την ακολουθία $(1 - \frac{1}{n})$ η οποία είναι αύξουσα με άνω φράγμα τον $3$, για παράδειγμα, και οι όροι της "συσσωρεύονται" στο σημείο $1$.)
Ας δούμε, όμως, και πάλι το σύνολο

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

των όρων της ακολουθίας. Μήπως μπορούμε να διακρίνουμε το supremum του $X$; Νομίζω ότι η απάντηση πρέπει να είναι προφανής: τα σημεία $x_n$ "συσσωρεύονται" στο σημείο $x$ και επομένως αυτό το ίδιο το $x$ πρέπει να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα όλων των $x_n$, δηλαδή το supremum του συνόλου $X$.
*Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.*
Όλα αυτά είναι "λογικά" κατά κάποια "διαισθητική" έννοια, αλλά πρέπει να καταστρώσουμε μια αυστηρή απόδειξη. Πρέπει να πούμε με μαθηματικά αυστηρό τρόπο ποιό είναι το υποψήφιο όριο $x$, πώς δηλαδή προκύπτει η ύπαρξη αυτού του $x$, και μετά να αποδείξουμε ότι πράγματι $x_n \to x$. Φυσικά, η απόδειξη δεν πρέπει να εξαρτάται από ζωγραφιές, όσο πειστικές κι αν είναι αυτές και όσο κι αν μας βοηθούν να βρούμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο $x$.
Μέχρι τώρα έχουμε καταφέρει τα εξής με τη βοήθεια του σχήματος: να "πεισθούμε" ότι η $(x_n)$ πρέπει να έχει κάποιο όριο $x$ και ότι αυτό το όριο φαίνεται να ταυτίζεται με το supremum του συνόλου $X$ των όρων της $(x_n)$.
Και τώρα φτάσαμε στο *κομβικό σημείο* της απόδειξης. Μάλιστα, τώρα θα ξεκαθαρίσουμε και *για ποιόν λόγο ανακατέψαμε στη συζήτηση το σύνολο $X$.*
Ξαναλέμε: είναι διασθητικά προφανές ότι το $x$ είναι το όριο της $(x_n)$ και είναι διαισθητικά προφανές ότι το ίδιο $x$ είναι το supremum του $X$.

*Ερώτημα: ποιό από τα δυο, η ακολουθία $(x_n)$ ή το σύνολο $X$ "νομιμοποιούν" το $x$; (Ποιός από τους δυο "γονείς" έχει δικαίωμα εκ του νόμου να δηλώσει το "τέκνο" ώστε αυτό να "υπάρχει";)*

*Απάντηση: το σύνολο $X$ ! Δεν γνωρίζουμε αν μια αύξουσα ακολουθία έχει όριο, αλλά γνωρίζουμε ότι ένα μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. (Η "ύπαρξη" του supremum ("τέκνου") ενός μη-κενού, άνω φραγμένου συνόλου ("γονέας") νομιμοποιείται από την Ιδιότητα Supremum.)*

Άρα, να ο λόγος που μπήκε στην συζήτηση το σύνολο $X$ των όρων της $(x_n)$. Διότι το supremum αυτού του συνόλου, η ύπαρξη του οποίου (supremum) εξασφαλίζεται από την Ιδιότητα Supremum, θα είναι το υποψήφιο όριο της $(x_n)$.
Επομένως, η απόδειξη θα ακολουθήσει την εξής πορεία: θα θεωρήσουμε το supremum

του συνόλου $X$, θα το ονομάσουμε $x$ και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$. Τότε αφ' ενός θα έχουμε αποδείξει ότι η $(x_n)$ έχει κάποιο όριο $x$ αφ' ετέρου θα έχουμε αποδείξει και ότι το όριο της $(x_n)$ ταυτίζεται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη και στην δεύτερη περίπτωση.
*Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών.*
Ονομάζουμε, λοιπόν,

$$x = \sup X,$$

το οποίο είναι αριθμός, διότι το $X$ είναι άνω φραγμένο αφού η $(x_n)$ είναι άνω φραγμένη.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$x_n \to x.$$

Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ από κάποιον $n_0$ και πέρα.
*Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.*
Σκεφτόμαστε: *είναι αρκετό να βρούμε έστω και έναν $n_0$ με την ιδιότητα $|x_{n_0} - x| < \epsilon$.* Πράγματι, αυτό σημαίνει ότι ο $x_{n_0}$ βρίσκεται στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ και, επειδή ο $x$ είναι άνω φράγμα του συνόλου των όρων της $(x_n)$, ο $x_{n_0}$ βρίσκεται στο "μισό" διάστημα $(x - \epsilon, x]$. Τώρα, ΕΠΕΙΔΗ Η $(x_n)$ ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ, κάθε $x_n$ από τον $x_{n_0}$ και πέρα θα βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του $x_{n_0}$ και, φυσικά, δεν θα ξεπερνά τον $x$, οπότε θα βρίσκεται κι αυτός στο "μισό" διάστημα $(x - \epsilon, x]$ και άρα και στο "ολόκληρο" διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Δηλαδή θα ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ και θα τελειώσει η απόδειξη. Και γιατί αναμένουμε ότι θα ισχύει $|x_{n_0} - x| < \epsilon$ έστω για έναν $n_0$; Μα διότι ο $x$ είναι το supremum του συνόλου $X$, οπότε κάποιο στοιχείο του $X$, δηλαδή όρος της $(x_n)$, πρέπει να βρίσκεται όσο θέλουμε κοντά στον $x$.
*Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και πάμε στην απόδειξη.*
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή ο $x$ είναι το supremum του συνόλου $X$, υπάρχει κάποιο στοιχείο $x_{n_0}$ του $X$ ώστε

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x.$$

Επειδή η $(x_n)$ είναι αύξουσα και επειδή ο $x$ είναι άνω φράγμα του $X$, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα ισχύει

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$|x_n - x| < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα $x_n \to x$.

[β] Ομοίως!! $\square$

(Η απόδειξη έπιασε περίπου τρεις σελίδες ενώ στο βιβλίο πιάνει μισή σελίδα! Ο λόγος είναι ότι εδώ η απόδειξη είναι γεμάτη με επεξηγηματικές παρενθέσεις. Το ίδιο έγινε και στον πίνακα.)

Υπάρχουν κάποια υποπροϊόντα του Θεωρήματος. Για παράδειγμα, αν η $(x_n)$ είναι αύξουσα και αν $x_n \to x$, τότε, επειδή ο $x$ είναι το supremum του συνόλου των όρων της $(x_n)$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$x_n \leq x$$

για κάθε $n$.
Υπάρχει και το ανάλογο συμπέρασμα για φθίνουσες ακολουθίες.

**Παράδειγμα.** Έστω $0 \leq a < 1$. Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n.$$

Η ακολουθία αυτή είναι παράδειγμα στην ενότητα 2.3 του βιβλίου και γνωρίζουμε ότι έχει όριο $\frac{1}{1-a}$. Ας δούμε, όμως, αν μπορούμε να πούμε κάτι γι αυτήν μέσα στα πλαίσια του θέματος των μονότονων ακολουθιών.
Είναι σαφές ότι, επειδή $a \geq 0$, ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + a + \cdots + a^n + a^{n+1} \geq 1 + a + \cdots + a^n = x_n$$

για κάθε $n$, οπότε η $(x_n)$ είναι αύξουσα.
Άρα η $(x_n)$ έχει όριο αριθμό ή $+\infty$ και για να δούμε τί από τα δυο ισχύει πρέπει να ελέγξουμε αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη ή όχι. Όμως, ισχύει

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} < \frac{1}{1 - a}$$

για κάθε $n$. Άρα ο αριθμός $\frac{1}{1-a}$ είναι άνω φράγμα της $(x_n)$, οπότε η $(x_n)$ έχει όριο αριθμό.

Πάμε στο παράδειγμα 2.4.2 του βιβλίου.

**Παράδειγμα.** Τώρα θεωρούμε την "περίεργη" ακολουθία με τύπο

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Η $(x_n)$ είναι αύξουσα. Πράγματι, ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = x_n$$

για κάθε $n$.
Τώρα θα δούμε ότι η $(x_n)$ είναι άνω φραγμένη, οπότε έχει όριο αριθμό.
Δυστυχώς, δεν υπάρχει πιο "σύντομη" έκφραση του αθροίσματος $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, οπότε πρέπει να σκεφτούμε κάτι έξυπνο για να βρούμε (αν υπάρχει) ένα άνω φράγμα του $x_n$ που να μην εξαρτάται από τον $n$. Ιδού:

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}$$

Άρα ο $3$ είναι άνω φράγμα της $(x_n)$ και επομένως η $(x_n)$ έχει όριο αριθμό, έστω

$$x_n = x.$$

Το όριο αυτό της $(x_n)$ είναι προφανώς $\leq 3$. Επίσης, το όριο είναι $\geq 2$ αφού η $(x_n)$ είναι αύξουσα και έχει πρώτο όρο $x_1 = 2$. Δηλαδή

$$2 \leq x \leq 3.$$

Πάμε τώρα σε ένα πάρα πολύ σημαντικό παράδειγμα. Είναι το παράδειγμα 2.4.3 του βιβλίου.

**Παράδειγμα.** Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Αποδεικνύεται ότι η $(x_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Δεν θα το αποδείξουμε στον πίνακα διότι η απόδειξη είναι τεχνικά περίπλοκη. Διαβάστε την στο βιβλίο. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η ακολουθία αυτή και η ακολουθία του προηγούμενου παραδείγματος έχουν το ίδιο όριο!! Δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Το κοινό αυτό όριο συμβολίζεται με το γράμμα $e$. Δηλαδή,

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

*Προσέξτε:* Αυτός είναι ο *ορισμός* του αριθμού $e$.