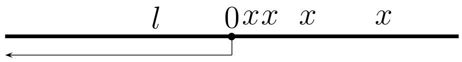
ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΣΕ 39 ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μ. Παπαδημητράκης.

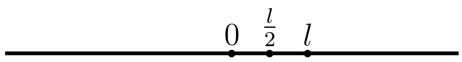
ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Κατ' αρχάς θα δούμε μια πολλή απλή πρόταση.



ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ο l έχει την εξής ιδιότητα: $l \leq x$ για κάθε $x > 0$. Τότε $l \leq 0$.*

Απόδειξη. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $l > 0$.
Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{l}{2}$, ο οποίος είναι > 0. Τότε, βάσει της υπόθεσης της πρότασης, πρέπει να ισχύει $l \leq \frac{l}{2}$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται $l \leq 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η αρχική υπόθεση της απόδειξης δεν είναι σωστή, οπότε $l \leq 0$.
Μπορούμε να διατυπώσουμε την ίδια απόδειξη με διαφορετικό τρόπο.
Υποθέτουμε πάλι ότι $l > 0$.



Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{l}{2}$ για τον οποίο προφανώς ισχύει $0 < x < l$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με την υπόθεση της πρότασης ότι ισχύει $l \leq x$ για *κάθε* $x > 0$.
Άρα η αρχική υπόθεση της απόδειξης δεν είναι σωστή, οπότε $l \leq 0$. $\square$

Η ιδέα της προηγούμενης απόδειξης είναι ότι όποιον *θετικό* αριθμό l κι αν πάρουμε υπάρχει κάποιος αριθμός x ο οποίος είναι κι αυτός *θετικός* και *μικρότερος από τον αριθμό που πήραμε*, δηλαδή τέτοιος ώστε $0 < x < l$. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τον $x = \frac{l}{2}$, αλλά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον $x = \frac{l}{3}$ ή τον $x = \frac{2l}{3}$ ή και οποιονδήποτε άλλον συγκεκριμένο x με την ιδιότητα $0 < x < l$.

Τί μας λέει η προηγούμενη πρόταση; Η υπόθεση είναι ότι ο αριθμός l βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) κάθε αριθμού δεξιά του 0. Το συμπέρασμα είναι ότι ο l είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του 0. Με πιο γλαφυρή διατύπωση: ο l σπρώχνεται προς τα αριστερά από όλους τους αριθμούς οι οποίοι είναι δεξιά του 0 και αναγκάζεται να είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του 0. Ας το πούμε διαφορετικά. Αν υπήρχε αριθμός l δεξιά του 0 τέτοιος ώστε όλοι οι αριθμοί που είναι δεξιά του 0 να είναι δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, τότε προφανώς αυτός ο l θα ήταν *ο μικρότερος αριθμός* δεξιά του 0. Με άλλα λόγια θα υπήρχε *ελάχιστος* αριθμός δεξιά του 0. Η πρόταση λέει ότι αυτό δεν είναι σωστό: δεν υπάρχει l ο οποίος είναι ελάχιστος θετικός διότι για παράδειγμα ο $\frac{l}{2}$ είναι ακόμη μικρότερος θετικός. Αυτό το τελευταίο φαίνεται να είναι προφανές, αλλά η εμπειρία μου λέει ότι πάρα πολλοί κάνουν λάθος και έχουν την (ψυχολογική;) τάση να θεωρούν κάπως επιπόλαια ότι υπάρχει κάποιος πολύ-πολύ-πολύ μικρός θετικός αριθμός ο οποίος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός. Γι αυτό τονίζω ότι:

Δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός αριθμός.

Το ότι αναφερόμαστε ειδικά στον αριθμό 0 και στη σχέση ανάμεσα σ' αυτόν και στους άλλους αριθμούς είναι καθαρά θέμα τυχαίας επιλογής. Τον ρόλο του 0 μπορεί να τον παίξει κάθε άλλος αριθμός. Επίσης, το "δεξιά" και το "αριστερά" μπορούν να αλλάξουν ρόλους. Έτσι έχουμε τις διατυπώσεις:

Δεν υπάρχει ελάχιστος αριθμός μεγαλύτερος του (οποιουδήποτε) a. Δεν υπάρχει μέγιστος αριθμός μικρότερος του (οποιουδήποτε) b.

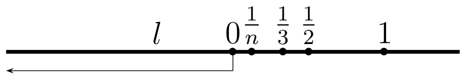
Επίσης:

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Έστω ότι ο l έχει την εξής ιδιότητα: $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τότε $l \leq a$.*

[β] *Έστω ότι ο u έχει την εξής ιδιότητα: $u \geq x$ για κάθε $x < b$. Τότε $u \geq b$.*

Αυτή είναι η Πρόταση 1.3 στο βιβλίο και μπορείτε να διαβάσετε εκεί την απόδειξη: είναι ίδια με την απόδειξη της πρώτης πρότασης παραπάνω. Για παράδειγμα, στο [α] αντί του $\frac{l}{2}$, δηλαδή του $\frac{0+l}{2}$, χρησιμοποιούμε τον $\frac{a+l}{2}$. Αν $a < l$, τότε $a < \frac{a+l}{2} < l$.

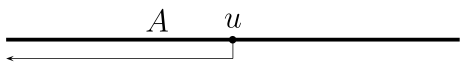
Τώρα θα κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση σαν προοίμιο κάποιας σημαντικής ιδιότητας των αριθμών που θα μελετήσουμε σε λίγο.

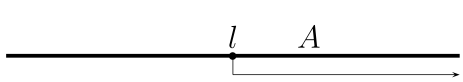


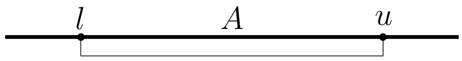
Ας υποθέσουμε ότι ένας αριθμός l έχει την ιδιότητα Α: $l \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι αριθμοί $\frac{1}{n}$, όταν ο n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς, είναι θετικοί αριθμοί αλλά *δεν* είναι *όλοι* οι θετικοί αριθμοί. Άρα η ιδιότητα Α είναι ασθενέστερη από την ιδιότητα της πρότασης: $l \leq x$ για κάθε $x > 0$. Αυτό σημαίνει ότι, ενώ ένας l που έχει την ιδιότητα της πρότασης υποχρεώνεται να είναι ≤ 0, ένας l που έχει την ιδιότητα Α μπορεί να μην υποχρεώνεται να είναι ≤ 0 και ότι θα μπορούσε να υπάρχει κάποιος $l > 0$ που να έχει την ιδιότητα Α. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να υπάρχει κάποιος $l > 0$ τέτοιος ώστε στο διάστημα $(0, l)$ να μην υπάρχει κανένας αριθμός $\frac{1}{n}$ όταν ο n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς. Θα δούμε σε λίγο ότι αυτό δεν είναι σωστό. Αυτή είναι η Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, αλλά την απόδειξη δεν μπορούμε να την κάνουμε αυτή τη στιγμή με τα μέσα που διαθέτουμε. Θα χρειαστούμε μια άλλη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Supremum.

Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός u τέτοιος ώστε να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A. Αν το σύνολο A είναι άνω φραγμένο και ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε αριθμός $> u$ είναι επίσης άνω φράγμα του A. Ομοίως, ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός l τέτοιος ώστε να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A. Αν το σύνολο A είναι κάτω φραγμένο και ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε αριθμός $< l$ είναι επίσης κάτω φράγμα του A. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν περιέχεται σε κάποιο διάστημα $[l, u]$.

Αν ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου A, τότε το σύνολο A βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u και, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε το A βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l.

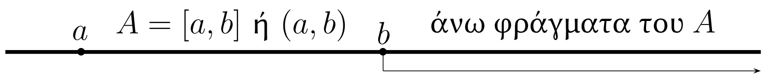






Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Έστω $A = [a, b]$.
Είναι προφανές ότι κάθε αριθμός $u \geq b$ είναι άνω φράγμα του $[a, b]$ αλλά και ότι κάθε άνω φράγμα u του $[a, b]$ είναι αναγκαστικά $\geq b$. Αυτό το τελευταίο ισχύει διότι, αν ο u είναι άνω φράγμα του $[a, b]$, πρέπει να είναι $\geq$ κάθε στοιχείου του $[a, b]$ και, επομένως, και του b ο οποίος είναι στοιχείο του $[a, b]$.
Άρα τα άνω φράγματα του $[a, b]$ είναι όλοι οι αριθμοί $\geq b$ και κανένας άλλος.
Παρατηρούμε ότι το $[a, b]$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, τον b.



Παράδειγμα. Έστω $A = (a, b)$.
Είναι πάλι προφανές ότι κάθε αριθμός $u \geq b$ είναι άνω φράγμα του (a, b). Όταν, όμως, θέλουμε να δούμε αν ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε άνω φράγμα u του (a, b) είναι αναγκαστικά $\geq b$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα στο προηγούμενο παράδειγμα, διότι τώρα ο b δεν είναι στοιχείο του (a, b).
Σκεφτόμαστε, όμως, ότι αν ο u είναι άνω φράγμα του (a, b), τότε είναι $\geq$ κάθε στοιχείου του (a, b) και, επομένως, κάθε αριθμού $< b$, οπότε, σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, ο u πρέπει να είναι $\geq b$.
Άρα τα άνω φράγματα του (a, b) είναι όλοι οι αριθμοί $\geq b$ και κανένας άλλος.
Βλέπουμε πάλι ότι το (a, b), όπως και το $[a, b]$, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, τον b.

Παράδειγμα. Με όμοιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι τα κάτω φράγματα των συνόλων $A = [a, b]$ και $A = (a, b)$ είναι όλοι οι αριθμοί $\leq a$ και κανένας άλλος και, επομένως, και τα δυο σύνολα έχουν ως μέγιστο κάτω φράγμα τον a.

Ας θυμηθούμε μερικούς γνωστούς όρους. Αν το σύνολο A έχει **μέγιστο στοιχείο**, δηλαδή στοιχείο του A που είναι $>$ από κάθε άλλο στοιχείο του A, τότε αυτό ονομάζεται **maximum** του A και συμβολίζεται $\max A$. Ομοίως, αν το A έχει **ελάχιστο στοιχείο**, δηλαδή στοιχείο του A που είναι $<$ από κάθε άλλο στοιχείο του A, τότε αυτό ονομάζεται **minimum** του A και συμβολίζεται $\min A$.

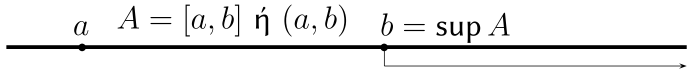
Παραδείγματα. Για το $[a, b]$ έχουμε $\max[a, b] = b$ και $\min[a, b] = a$.
Όμως, το (a, b) δεν έχει μέγιστο στοιχείο ακριβώς επειδή δεν υπάρχει μέγιστος αριθμός $< b$. Ομοίως, το (a, b) δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Και τώρα ας δούμε την σημαντικότερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ SUPREMUM. *Κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Με άλλη διατύπωση: αν ένα μη-κενό σύνολο είναι άνω φραγμένο (οπότε έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα), τότε από τα άνω φράγματά του υπάρχει ένα το οποίο είναι το ελάχιστο δυνατό.*

Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός μη-κενού, άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται **supremum** του A και συμβολίζεται $\sup A$.

Παραδείγματα. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $\sup[a,b]=b$ και $\sup(a,b)=b$. Θυμηθείτε ότι το $[a,b]$ έχει μέγιστο στοιχείο ενώ το (a,b) δεν έχει μέγιστο στοιχείο.



Κάποιες φορές έχουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο A το οποίο είναι μη-κενό και άνω φραγμένο και πρέπει να βρούμε το $\sup A$. Υπάρχει μια ειδική περίπτωση που το $\sup A$ είναι άμεσα αναγνωρίσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν το σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο,* $\max A$*, τότε αυτό είναι το* $\sup A$*.*

Απόδειξη. Προφανώς το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A (διότι δεν υπάρχει στοιχείο του A που να είναι $>\max A$) και φυσικά κάθε αριθμός $\geq \max A$ είναι επίσης άνω φράγμα του A. Από την άλλη μεριά κάθε άνω φράγμα του A είναι $\geq \max A$ διότι το $\max A$ είναι στοιχείο του A. Άρα τα άνω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\geq \max A$ και μόνο αυτοί. Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. $\square$

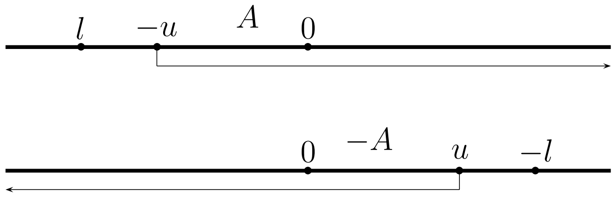
ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα δούμε την "συμμετρική" ιδιότητα της Ιδιότητας Supremum.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ INFIMUM. *Κάθε μη-κενό και κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Με άλλη διατύπωση: αν ένα μη-κενό σύνολο είναι κάτω φραγμένο (οπότε έχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα), τότε από τα κάτω φράγματά του υπάρχει ένα το οποίο είναι το μέγιστο δυνατό.*

Απόδειξη. Έστω σύνολο A το οποίο είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο.
Ορίζουμε το σύνολο

$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$



Το σύνολο $-A$ είναι το συμμετρικό του A ως προς το 0 και προφανώς είναι μη-κενό. Αν l είναι οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα του A συνεπάγεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-A$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum το $-A$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω

$$u = \sup(-A).$$

Θα δούμε ότι το $-u$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A και η απόδειξη θα τελειώσει.
(1) Το u είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-u$ είναι κάτω φράγμα του A.
(2) Έστω τυχαίο κάτω φράγμα l του A. Τότε το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και, επειδή το u είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του $-A$, συνεπάγεται $u \leq -l$. Άρα $l \leq -u$.
Από τα (1), (2) συνεπάγεται ότι το $-u$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A. □

Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη-κενού, κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται **infimum** του A και συμβολίζεται $\inf A$.

Παραδείγματα. Γνωρίζουμε ήδη ότι $\inf[a, b] = a$ και $\inf(a, b) = a$.
Παρατηρήστε ότι το $[a, b]$ έχει ελάχιστο στοιχείο ενώ το (a, b) δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο,* $\min A$, *τότε αυτό είναι το* $\inf A$.

Η απόδειξη της Πρότασης αυτής είναι ίδια με την απόδειξη της ανάλογης Πρότασης για τη σχέση ανάμεσα στα $\sup A$ και $\max A$. Μπορείτε να την κάνετε μόνοι σας.

Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε δεν υπάρχει κανένα άνω φράγμα του A, οπότε δεν υπάρχει ούτε ελάχιστο άνω φράγμα του A. Μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε κάπως την έννοια του άνω φράγματος και να συμπεριλάβουμε το $+\infty$ ως άνω φράγμα του A. Επειδή το $+\infty$ είναι το μοναδικό άνω φράγμα του A, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Γι αυτόν τον λόγο στην περίπτωση ενός μη-κενού αλλά όχι άνω φραγμένου συνόλου A ορίζουμε $\sup A = +\infty$. Ομοίως, στην περίπτωση ενός μη-κενού αλλά όχι κάτω φραγμένου συνόλου A ορίζουμε $\inf A = -\infty$.

Παραδείγματα. Το $\{x \,|\, x > 0\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup\{x \,|\, x > 0\} = +\infty$. Ομοίως, το $\{x \,|\, x < 0\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, οπότε $\inf\{x \,|\, x < 0\} = -\infty$.
Μην ξεχνάμε ότι τα σύνολα αυτά συμβολίζονται και $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$, οπότε γενικότερα το supremum ενός διαστήματος ταυτίζεται με το δεξιό άκρο του και το infimum ενός διαστήματος ταυτίζεται με το αριστερό άκρο του.

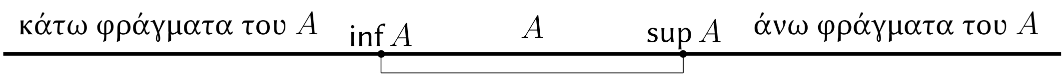
Έτσι λοιπόν κάθε μη-κενό σύνολο έχει supremum το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Στην περίπτωση που το σύνολο είναι άνω φραγμένο το supremum του είναι αριθμός και η ύπαρξή του αποδεικνύεται από την Ιδιότητα Supremum ενώ στην περίπτωση που το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο το supremum του είναι $+\infty$ εξ ορισμού. Ομοίως, στην περίπτωση που το σύνολο είναι κάτω φραγμένο το infimum του είναι αριθμός και η ύπαρξή του αποδεικνύεται από την Ιδιότητα Infimum ενώ στην περίπτωση που το σύνολο δεν είναι κάτω φραγμένο το infimum του είναι $-\infty$ εξ ορισμού.

Υπάρχει μια απλή σχέση ανάμεσα στο infimum και στο supremum ενός μη-κενού συνόλου A:

$$\inf A \le \sup A.$$

Πράγματι, για κάθε $a \in A$ (το σύνολο είναι μη-κενό) ισχύει $a \le \sup A$ διότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A και ισχύει $\inf A \le a$ διότι το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A. Άρα $\inf A \le \sup A$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο A βρίσκεται ανάμεσα στα $\inf A$ και $\sup A$, ότι (αν το A είναι άνω φραγμένο) τα άνω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\ge \sup A$ και κανένας άλλος και ότι (αν το A είναι κάτω φραγμένο) τα κάτω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\le \inf A$ και κανένας άλλος.



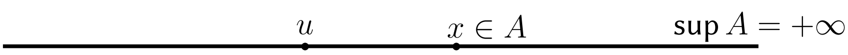
Τώρα θα δούμε δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του supremum οποιουδήποτε μη-κενού συνόλου A.

(i) *Δεν υπάρχει στο* A *στοιχείο* $>$ *από το* $\sup A$.

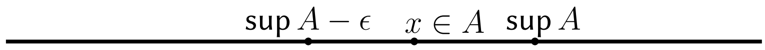
Αυτή η ιδιότητα λέει ότι όλα τα στοιχεία του A είναι $\le \sup A$ και εκφράζει απλώς το ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A. Παρατηρήστε ότι ισχύει είτε το $\sup A$ είναι αριθμός είτε το $\sup A$ είναι $+\infty$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\sup A$ *υπάρχει στοιχείο του* A.

Αυτή η ιδιότητα έχει να κάνει με το ότι το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Το A δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A + \infty$. Τότε παίρνουμε έναν αριθμό u όσο θέλουμε μεγάλο. Ο u δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει στοιχείο $x \in A$ ώστε $x > u$. Άρα, λοιπόν, όσο θέλουμε κοντά στο $\sup A = +\infty$ (δηλαδή κοντύτερα στο $+\infty$ από οποιονδήποτε μεγάλο αριθμό u) υπάρχει στοιχείο του A.



Δεύτερη περίπτωση: Το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup A$ είναι αριθμός. Τότε παίρνουμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ όσο θέλουμε μικρό. Τότε ο $\sup A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (αφού το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A), οπότε υπάρχει στοιχείο $x \in A$ ώστε $\sup A - \epsilon < x$. Και επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A πρέπει να είναι $\sup A - \epsilon < x \leq \sup A$. Αυτό μας λέει ότι ο x απέχει από το $\sup A$ απόσταση $< \epsilon$. Άρα, πράγματι, όσο θέλουμε κοντά στο $\sup A$ (δηλαδή σε απόσταση από το $\sup A$ μικρότερη από οποιονδήποτε μικρό θετικό ϵ) υπάρχει στοιχείο του A.



Τις δυο αυτές ιδιότητες του $\sup A$ μπορούμε να τις διατυπώσουμε λίγο διαφορετικά:

(i) *Για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $x \leq \sup A$.

(ii) *Για κάθε* $\gamma < \sup A$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\gamma < x \leq \sup A$.

Ο γ είναι ένα άλλο σύμβολο για τον u που χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη περίπτωση ($\sup A = +\infty$) και ένα άλλο σύμβολο για τον $\sup A - \epsilon$ που χρησιμοποιήσαμε στην δεύτερη περίπτωση ($\sup A < +\infty$). Παρατηρήστε ότι σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση, όταν ο ϵ διατρέχει όλους τους θετικούς αριθμούς τότε ο $\gamma = \sup A - \epsilon$ διατρέχει όλους τους αριθμούς $< \sup A$ και αντιστρόφως.

Υπάρχουν και οι ανάλογες ιδιότητες του infimum ενός μη-κενού συνόλου:

(i) *Δεν υπάρχει στο* A *στοιχείο* $<$ *από το* $\inf A$. *Αλλιώς: για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $\inf A \leq x$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\inf A$ *υπάρχει στοιχείο του* A. *Αλλιώς: Για κάθε* $\gamma > \inf A$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\inf A \leq x < \gamma$.

Μια παρατήρηση: το supremum ενός συνόλου δεν είναι αναγκαστικά στοιχείο του συνόλου. Αυτό φαίνεται καθαρά στο παράδειγμα του διαστήματος (a, b). Είναι προφανές ότι, αν το $\sup A$ είναι στοιχείο του συνόλου A, τότε το $\sup A$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A. Δηλαδή, το $\sup A$ ανήκει στο A αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο και τότε $\sup A = \max A$.

Όταν θέλουμε να βρούμε το supremum ενός συγκεκριμένου συνόλου A προσπαθούμε κατ' αρχάς να φτιάξουμε μια όσο το δυνατόν πιο πιστή εικόνα του πάνω στην πραγματική ευθεία είτε στο χαρτί είτε στη φαντασία μας. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε αυτομάτως $\sup A = +\infty$. Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε εντοπίζουμε ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα u του A και (στοχεύοντας προς το μικρότερο άνω φράγμα του A) αρχίζουμε να μετακινούμε αυτό το άνω φράγμα u προς τα αριστερά προσέχοντας ώστε το u να παραμένει άνω φράγμα του A. Κάποια στιγμή θα πετύχουμε την θέση u_0 του u στην οποία αυτό είναι άνω φράγμα του A έτσι ώστε αν μετακινηθεί έστω και λίγο προς τα αριστερά από εκείνη την θέση παύει να είναι άνω φράγμα του A. Τότε ο u_0 είναι το supremum του A. Για να εντοπίσουμε το infimum του A κάνουμε τα ίδια αλλά από την άλλη μεριά. Βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα l του A και το μετακινούμε προς τα δεξιά μέχρι να πετύχουμε την θέση l_0 του l στην οποία αυτό είναι κάτω φράγμα του A έτσι ώστε αν μετακινηθεί έστω και λίγο προς τα δεξιά από εκείνη την θέση παύει να είναι κάτω φράγμα του A. Τότε ο l_0 είναι το infimum του A. Φυσικά, αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε αυτομάτως είναι $\inf A = -\infty$.

Μέχρι τώρα τα παραδείγματα συνόλων που εξετάσαμε σε σχέση με το supremum και το infimum ήταν διαστήματα.

Παράδειγμα. θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών.

Το $\mathbb{N}$ έχει τον 1 ως ελάχιστο στοιχείο, οπότε

$$\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1.$$

Η κατάσταση από την πάνω μεριά είναι πιο ενδιαφέρουσα!
Κατ' αρχάς είναι απλό να δούμε ότι το $\mathbb{N}$ *δεν έχει μέγιστο στοιχείο.* Πράγματι, αν κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ήταν μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$ τότε, επειδή $n+1 \in \mathbb{N}$, θα ίσχυε $n+1 \leq n$ που είναι άτοπο. Με άλλη διατύπωση: όποιον $n \in \mathbb{N}$ κι αν πάρουμε υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$, ο $n+1$, το οποίο είναι $> n$, οπότε ο n δεν είναι μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$.
Είναι, όμως, αρκετά πιο δύσκολο να δούμε αν το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο ή όχι. Όταν σχεδιάζουμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω στην πραγματική ευθεία τους κάνουμε να απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά υπονοώντας κατά κάποιο τρόπο ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτό, όμως, αν πράγματι ισχύει, χρειάζεται απόδειξη.
Ας προσπαθήσουμε να μιμηθούμε την προηγούμενη απόδειξη του ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο για να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει κανένα άνω φράγμα. Θεωρούμε ότι κάποιος u είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ (ελπίζοντας να καταλήξουμε σε άτοπο) έχοντας υπ' όψη ότι ο u είναι πραγματικός αριθμός αλλά *όχι αναγκαστικά φυσικός.* Τώρα, όμως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $u+1 \leq u$ (που θα μας έφτανε στο πολυπόθητο άτοπο) διότι ο $u+1$ δεν είναι αναγκαστικά στοιχείο του $\mathbb{N}$. Προσέξτε: αν ο u ήταν φυσικός, τότε ο $u+1$ θα ήταν κι αυτός φυσικός και θα συμπεραίναμε $u+1 \leq u$ (αφού ο u υποτίθεται ότι είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$). Όμως, ο u δεν είναι αναγκαστικά φυσικός, οπότε ούτε κι ο $u+1$ είναι αναγκαστικά φυσικός. Άρα το επιχείρημα αυτό δεν δουλεύει και πρέπει να βρούμε έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης του ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Η απόδειξη προχωράει μόνο μέσω της Ιδιότητας Supremum!

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε*

$$\sup \mathbb{N} = +\infty.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε, σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, $\sup \mathbb{N}$, το οποίο είναι αριθμός.
Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup \mathbb{N} - 1 < n \leq \sup \mathbb{N}.$$

Συνεπάγεται

$$\sup \mathbb{N} < n + 1.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $n+1 \in \mathbb{N}$ ενώ ο $\sup \mathbb{N}$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. □

Αυτό είναι το Θεώρημα 1.1 στο βιβλίο.
Και ερχόμαστε στην

Η ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. *Αν $l > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < l$.*

Απόδειξη. Ο $\frac{1}{l}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ (διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l} < n$. □

ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1.2.7. *Υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$;*

Λύση: Έστω ότι το (c, d) είναι το μικρότερο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το $[a, b]$:

$$[a, b] \subseteq (c, d).$$

Τότε $a \in (c, d)$ και $b \in (c, d)$, οπότε

$$c < a \leq b < d.$$

Θεωρούμε τον $c' = \frac{c+a}{2}$ (ή οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα στους c, a) και τον $d' = \frac{b+d}{2}$, οπότε

$$c < c' < a \leq b < d' < d.$$

Τότε

$$[a, b] \subseteq (c', d'), \qquad (c', d') \subsetneq (c, d).$$

Δηλαδή, υπάρχει ανοικτό διάστημα μικρότερο από το (c, d) που κι αυτό περιέχει το $[a, b]$. Άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Σχόλιο: Στην ερώτηση αν υπάρχει ελάχιστο κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$ η απάντηση είναι προφανώς θετική. Το ελάχιστο τέτοιο διάστημα είναι το ίδιο το $[a, b]$. Προφανώς η απάντηση είναι θετική και στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b). Αλλά η απάντηση στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο κλειστό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b) είναι αρνητική και η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

Άσκηση 1.2.10. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A και $u = \sup A$ (οπότε το u είναι αριθμός).*

(i) Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$;

(ii) Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$;

(iii) Ποιές είναι οι απαντήσεις στα (i), (ii) αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $u \notin A$;

Λύση: (i) Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum του A γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u - \epsilon, u]$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u - \epsilon, u] \cap A$ και, επομένως, $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση είναι: ναι.

(ii) Το προηγούμενο επιχείρημα εγγυάται ότι υπάρχει $x \in A$ στο διάστημα $(u - \epsilon, u]$. Αυτό το στοιχείο x του A μπορεί να είναι το u και μπορεί να μην υπάρχει άλλο στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u]$ δηλαδή να μην υπάρχει κανένα στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u)$. Γι αυτό υποψιαζόμαστε ότι η απάντηση είναι αρνητική και ψάχνουμε να βρούμε αντιπαράδειγμα.

• Θεωρούμε το μονοσύνολο $A = \{a\}$. Τότε $a = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$ (μάλιστα, κάθε $\epsilon > 0$ είναι κατάλληλος) ώστε το διάστημα $(a - \epsilon, a)$ να

μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(a-\epsilon, a) \cap A = \emptyset$.
Άρα η απάντηση στο ερώτημα είναι: όχι.

• Άλλο αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $A = [a, b] \cup \{c\}$, όπου $a \leq b < c$. Τότε $c = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$, για παράδειγμα οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \leq c - b$, ώστε το διάστημα $(c-\epsilon, c)$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(c-\epsilon, c) \cap A = \emptyset$.

(iii) Τώρα υποθέτουμε ότι $u \notin A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του supremum του A έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$. Επειδή $x \in A$ και $u \notin A$, στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να είναι $x = u$, οπότε $u - \epsilon < x < u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u-\epsilon, u)$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u-\epsilon, u) \cap A$, οπότε $(u-\epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση στο ερώτημα (ii) είναι: ναι.
Από τη στιγμή που είναι $(u-\epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$ και το $(u-\epsilon, u]$ είναι μεγαλύτερο από το $(u-\epsilon, u)$, θα είναι αυτομάτως και $(u-\epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση και στο ερώτημα (i) είναι: ναι.

Άσκηση 1.2.11. *Έστω μη-κενό σύνολο A και $u \in \mathbb{R}$.*

[α] *Αποδείξτε ότι* $\sup A \leq u$ *αν και μόνο αν ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.*

[β] *Αποδείξτε ότι $u \leq$* $\sup A$ *αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.*

Λύση: [α] Έστω $\sup A \leq u$. Έστω τυχόν $x \in A$. Τότε $x \leq \sup A$, οπότε $x \leq u$. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Μια ελάχιστα διαφορετική διατύπωση. Έστω $\sup A \leq u$. Επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, ο u είναι κι αυτός άνω φράγμα του A. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι ο u είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\sup A \leq u$.
Το αντίστροφο με άλλο τρόπο. Έστω (για άτοπο) ότι $u < \sup A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x \leq \sup A$. Αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\sup A \leq u$.

[β] Έστω $u \leq \sup A$. Έστω τυχόν $\gamma < u$. Τότε $\gamma < \sup A$, οπότε από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Άρα για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < u$. Θεωρούμε $\gamma = \sup A$ (ή οποιονδήποτε γ με $\sup A \leq \gamma < u$). Τότε αυτός ο γ είναι $< u$, οπότε βάσει της υπόθεσης πρέπει να υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$, δηλαδή $\sup A < x$. Αυτό είναι άτοπο. Άρα $u \leq \sup A$.
Το αντίστροφο με λίγο διαφορετική διατύπωση. Τό ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$ σημαίνει ότι κάθε $\gamma < u$ *δεν* είναι άνω φράγμα του A. Όμως, το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε δεν μπορεί να ισχύει $\sup A < u$ και, επομένως, ισχύει $u \leq \sup A$.

Άσκηση 1.2.12. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B.*

[α] *Αποδείξτε ότι* $\sup A \leq \inf B$ *αν και μόνο αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.*

[γ] *Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Αποδείξτε ότι* $\sup A = \inf B$.

Λύση: [α] Έστω $\sup A \leq \inf B$. Επειδή για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq \sup A$ και $\inf B \leq y$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq y$.

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.
Πρώτος τρόπος: Θεωρούμε τυχόν $y \in B$ (και το σταθεροποιούμε *προσωρινά*). Επειδή ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι το y είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ισχύει $\sup A \le y$. Τώρα (αποσταθεροποιώντας το y) έχουμε ότι ισχύει $\sup A \le y$ για κάθε $y \in B$, οπότε το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Τέλος, επειδή το $\inf B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup A \le \inf B$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω (για άτοπο) $\inf B < \sup A$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\inf B < x$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\inf B$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < x$. Άρα υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y < x$ και αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.

[γ] Από την υπόθεση και από το [α] συνεπάγεται $\sup A \le \inf B$. Άρα μένει να αποδείξουμε ότι $\inf B \le \sup A$.
Πρώτος τρόπος: Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < \inf B$. Παρατηρήστε ότι αυτό σημαίνει ότι οι $\sup A, \inf B$ είναι και οι δυο αριθμοί (το $\sup A$ δεν μπορεί να είναι $+\infty$ και το $\inf B$ δεν μπορεί να είναι $-\infty$).
Παίρνοντας οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \le \inf B - \sup A$, βλέπουμε ότι *δεν* υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. (Διότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \le \sup A$ και $\inf B \le y$, οπότε $y - x \ge \inf B - \sup A \ge \epsilon$.) Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση του [γ], οπότε $\inf B \le \sup A$.
Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Επειδή $x \le \sup A$ και $\inf B \le y$, συνεπάγεται $\inf B - \sup A \le y - x < \epsilon$.
Άρα έχουμε ότι ισχύει $\inf B - \sup A < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό, βάσει της πρώτης πρότασης που αποδείξαμε στο μάθημα, συνεπάγεται ότι $\inf B - \sup A \le 0$ και, επομένως, $\inf B \le \sup A$.

ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Παράδειγμα. Ως εφαρμογή της Αρχιμήδειας Ιδιότητας θα μελετήσουμε το σύνολο
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}.$$
Κατ' αρχάς το σύνολο A έχει προφανώς μέγιστο στοιχείο τον αριθμό 1. Οπότε, πολύ απλά,
$$\sup A = \max A = 1.$$
Τώρα, σχετικά με τα κάτω φράγματα του A παρατηρούμε ότι προφανώς ο αριθμός 0 είναι κάτω φράγμα του A και, επομένως, κάθε αριθμός ≤ 0 είναι κάτω φράγμα του A. Από την άλλη μεριά, η Αρχιμήδεια Ιδιότητα λέει ότι για κάθε $l > 0$ υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$, δηλαδή υπάρχει στοιχείο του συνόλου A το οποίο είναι μικρότερο από τον l. Επομένως, κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A, οπότε τα κάτω φράγματα του A είναι οι αριθμοί ≤ 0 και κανένας άλλος. Άρα το μέγιστο κάτω φράγμα του A είναι ο 0:
$$\inf A = 0.$$
Παρατηρήστε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Για κάθε στοιχείο $\frac{1}{n}$ του A υπάρχει ακόμη μικρότερο στοιχείο του A. Για παράδειγμα το $\frac{1}{n+1}$.

Τώρα πάμε σε μια Πρόταση, το αποτέλεσμα της οποίας θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το *ακέραιο μέρος* ενός οποιουδήποτε αριθμού. Η Πρόταση αυτή είναι η Πρόταση 1.5 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε x.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο x είναι ανάμεσα σε δυο *διαδοχικούς* ακεραίους και το πρώτο βήμα θα είναι να αποδείξουμε ότι ο x είναι ανάμεσα σε δυο ακεραίους, χωρίς να μας ενδιαφέρει αν αυτοί είναι διαδοχικοί.
Από προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x < m$. Αυτό ισχύει διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε ο x που έχουμε δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά, ούτε ο $-x$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $-x < n$ που σημαίνει $-n < x$. Ονομάζουμε $l = -n$ και έτσι έχουμε βρει δυο ακεραίους, τον l και τον m ώστε
$$l < x < m.$$
(Προσέξατε το κόλπο; Για να βρούμε ακέραιο μικρότερο του x, βρήκαμε ακέραιο μεγαλύτερο του $-x$.)
Τώρα στοχεύουμε σε *διαδοχικούς* ακέραιους.
Ξεκινάμε με τον l ο οποίος είναι $\leq x$. Αν ο ισχυρισμός

"*αν ο ακέραιος τ είναι $\leq x$ τότε και ο $\tau + 1$ είναι $\leq x$*"

ήταν σωστός, τότε η Αρχή της Επαγωγής θα συνεπαγόταν ότι, ξεκινώντας με τον l, όλοι οι ακέραιοι από τον l και πέρα θα ήταν $\leq x$. (*Αφού ο l είναι $\leq x$, και ο $l + 1$ είναι $\leq x$. Αφού ο $l + 1$ είναι $\leq x$, και ο $l + 2$ είναι $\leq x$. Κλπ.*) Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι ο ακέραιος m είναι $> x$.
Άρα ο προηγούμενος ισχυρισμός δεν είναι σωστός, οπότε υπάρχει κάποιος ακέραιος τ

ο οποίος είναι $\leq x$ αλλά που ο $\tau+1$ είναι $> x$. Αν συμβολίσουμε k αυτόν τον τ, έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$k \leq x < k+1.$$

Αποδείξαμε την ύπαρξη του k. Η απόδειξη της μοναδικότητας του k είναι απλή. Δείτε την στο βιβλίο. $\square$

Έτσι, λοιπόν, σε κάθε x αντιστοιχίζεται μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ με την ιδιότητα $k \leq x < k+1$ και αυτόν τον μονοσήμαντα ορισμένο k τον ονομάζουμε **ακέραιο μέρος** του x και τον συμβολίζουμε

$$[x].$$

Παράδειγμα. $[3]=3$, $[-3]=-3$, $[3.5]=3$, $[-3.5]=-4$.

Τώρα έχουμε ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη. Θα μελετήσουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση για να καταλάβουμε καλύτερα την απόδειξη στην γενική περίπτωση.
Ας υποθέσουμε ότι μας δίνουν δυο αριθμούς a, b οι οποίοι απέχουν απόσταση > 1. Τότε είναι αναμενόμενο ότι ανάμεσά τους θα υπάρχει κάποιος ακέραιος, αφού κάθε δυο διαδοχικοί ακέραιοι απέχουν απόσταση ακριβώς 1. Και, επομένως, είναι αναμενόμενο ότι ο πρώτος ακέραιος που βρίσκεται δεξιά του a θα είναι ανάμεσα στον a και στον b. Ποιός είναι αυτός ο ακέραιος; Προφανώς, ο $[a]+1$. Άρα θα αποδείξουμε (αυστηρά) ότι ισχύει $a < [a]+1 < b$ με την υπόθεση $b-a > 1$.
Κατ' αρχάς είναι προφανές ότι

$$a < [a]+1.$$

Κατόπιν, επειδή $b-a > 1$ και επειδή $[a] \leq a$, ισχύει

$$[a]+1 \leq a+1 < b.$$

Αποδείξαμε ότι, αν $b-a > 1$, τότε υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$ και ότι ένας τέτοιος ρητός είναι ο ακέραιος $[a]+1$. (Πιθανόν να υπάρχουν κι άλλοι τέτοιοι ακέραιοι αν η απόσταση $b-a$ είναι ακόμη μεγαλύτερη.)
Πάμε τώρα στην γενική περίπτωση, όταν η απόσταση $b-a$ δεν είναι αναγκαστικά > 1. Σκεφτόμαστε ότι αν πολλαπλασιάσουμε δυο αριθμούς με έναν φυσικό n τότε και η απόστασή τους πολλαπλασιάζεται με n. Πράγματι,

$$nb - na = n(b-a).$$

Αν, λοιπόν, υπάρχει ένας φυσικός n ώστε $nb - na > 1$, τότε σύμφωνα με την ειδική περίπτωση παραπάνω θα υπάρχει ακέραιος ανάμεσα στους na και nb. Υπάρχει τέτοιος φυσικός; *Ναι*: επειδή $b-a > 0$, βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 < \frac{1}{n} < b-a$$

και, επομένως,

$$nb - na = n(b-a) > 1.$$

Κατόπιν, υπάρχει (από την ειδική περίπτωση) $k \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$na < k < nb$$

και ένας τέτοιος k είναι ο $k = [na] + 1$. Άρα

$$a < \frac{k}{n} < b,$$

οπότε υπάρχει ρητός, ο $r = \frac{k}{n}$, ώστε $a < r < b$. $\square$

Η τελευταία Πρόταση λέει με άλλα λόγια ότι μέσα σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (a, b), όσο μικρό κι αν είναι αυτό και οπουδήποτε στην πραγματική ευθεία κι αν βρίσκεται, υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δεν υπάρχει ανοικτό διάστημα το οποίο να μην περιέχει κανέναν ρητό. Η ιδιότητα αυτή των ρητών ονομάζεται **πυκνότητα**: *οι ρητοί είναι πυκνοί στην πραγματική ευθεία.*

Πρώτο σχόλιο: Από τη στιγμή που έχουμε εξασφαλίσει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός r ανάμεσα στους a και b, εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί ανάμεσα στους a και b. Από $a < r < b$ προκύπτει ότι υπάρχουν ρητοί r_1, r_2 ώστε $a < r_1 < r < r_2 < b$ και ότι υπάρχουν ρητοί r_3, r_4, r_5, r_6 ώστε $a < r_3 < r_1 < r_4 < r < r_5 < r_2 < r_6 < b$ κλπ.

Δεύτερο σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι οι a, b είναι και οι δυο ρητοί δεν χρειάζεται καμιά απόδειξη για την ύπαρξη ρητού αριθμού ανάμεσα στους a και b. Διότι με τον απλό τύπο $r = \frac{a+b}{2}$ έχουμε αυτομάτως έναν ρητό r ώστε $a < r < b$. Όμως, στην γενική περίπτωση ο $\frac{a+b}{2}$ δεν είναι αναγκαστικά ρητός και δεν υπάρχει κανένας τύπος που να δίνει ρητό αριθμό ανάμεσα στους a και b.

Και τώρα θα μιλήσουμε για ρίζες αριθμών.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 4$ έχει ως λύση τον θετικό αριθμό 2 (και τον αρνητικό -2). Επίσης, η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει ως λύση τον θετικό αριθμό 3 (και τον αρνητικό -3). Σ' αυτά δεν υπάρχει τίποτε "μαγικό". Τους αριθμούς 2 και 3 τους ξέρουμε από τα πρώτα παιδικά μας χρόνια (κοιτώντας τα δάχτυλά μας) και ξέρουμε και τους κανόνες: $2 \cdot 2 = 4$ και $3 \cdot 3 = 9$. Τί γίνεται, όμως, με την εξίσωση

$$x^2 = 2;$$

Μαθαίνουμε στο γυμνάσιο (ούτε κουβέντα στο δημοτικό) ότι η εξίσωση έχει ως λύση κάποιον θετικό αριθμό και αυτόν τον αριθμό τον συμβολίζουμε $\sqrt{2}$. Προσέξτε: τον αριθμό που συμβολίζουμε $\sqrt{2}$ *δεν τον γνωρίζουμε από πριν* ώστε να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του ώστε να προκύψει αποτέλεσμα 2 και ώστε να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει *αυτόν* τον αριθμό ως λύση. Αν κάποιος πει ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ο αριθμός $1.41\ \ldots$, πρέπει να αναλογιστούμε ότι ο αριθμός $1.41\ \ldots$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και ότι αφ' ενός δεν τα γνωρίζουμε όλα (και ούτε υπάρχει περίπτωση να τα βρούμε ποτέ όλα) αφ' ετέρου υπάρχει και το ερώτημα τί πραγματικά σημαίνει η παράσταση $1.41\ \ldots$ και αν όντως παριστάνει κάποιον πραγματικό αριθμό. (Αυτό το ερώτημα θα μας απασχολήσει στα κεφάλαια των ακολουθιών και των σειρών.) Ποιός, λοιπόν, είναι ο αριθμός $\sqrt{2}$; Και ξαναλέω: τον αριθμό $\sqrt{2}$ *δεν τον γνωρίζουμε από πριν*! Ο αριθμός $\sqrt{2}$ *ορίζεται* ως ο θετικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 2$ και για να ορίσουμε αυτόν τον αριθμό *πρέπει να έχει εξασφαλιστεί εκ των προτέρων* ότι η εξίσωση αυτή *έχει* λύση. Πρέπει, λοιπόν, πρώτα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει ως λύση *κάποιον* θετικό αριθμό και μετά να ονομάσουμε αυτόν τον αριθμό $\sqrt{2}$. Φυσικά στο γυμνάσιο (και στο λύκειο) ούτε κουβέντα για μια τέτοια απόδειξη. Ο λόγος είναι απλός: για την απόδειξη χρειάζεται η Ιδιότητα Supremum. Εδώ θα δούμε την απόδειξη ύπαρξης λύσης της λίγο γενικότερης εξίσωσης $x^2 = y$ για οποιονδήποτε δοσμένο $y \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για κάθε $y \geq 0$ η εξίσωση $x^2 = y$ έχει μοναδική μη-αρνητική λύση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε $y \geq 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, x \geq 0, x^2 \leq y\}.$$

Μέσω αυτού του συνόλου θα προκύψει η λύση της εξίσωσης $x^2 = y$.
Κατ' αρχάς να ξεκαθαρίσουμε τί σχέση μπορεί να έχει η λύση της $x^2 = y$ με αυτό το σύνολο X και πώς θα μπορούσε να προκύψει η λύση της $x^2 = y$ από το συγκεκριμένο σύνολο ώστε να σχεδιάσουμε και την πορεία της απόδειξης.
Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε από πριν ότι ο αριθμός ξ είναι μη-αρνητική λύση της $x^2 = y$, δηλαδή ότι ισχύει $\xi \geq 0$ και $\xi^2 = y$. Τότε οι σχέσεις που καθορίζουν τα στοιχεία του X γράφονται

$$x \geq 0, \quad x^2 \leq y$$

ισοδύναμα

$$x \geq 0, \quad x^2 \leq \xi^2$$

ισοδύναμα

$$x \geq 0, \quad -\xi \leq x \leq \xi$$

ισοδύναμα

$$0 \leq x \leq \xi.$$

Άρα το σύνολο X είναι το

$$X = [0, \xi].$$

Επομένως, ο ξ που ψάχνουμε είναι το δεξιό άκρο του X ή, με άλλα λόγια, είναι το supremum του X.
Άρα η στρατηγική μας θα είναι η εξής: θα αποδείξουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, από την Ιδιότητα Supremum θα συμπεράνουμε ότι το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και τέλος θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός, ο $\sup X$, είναι η μη-αρνητική λύση της $x^2 = y$.
Κατ' αρχάς ο αριθμός $x = 0$ ανήκει στο X διότι προφανώς ισχύει $0 \geq 0$ και $0^2 \leq y$. Άρα το X είναι μη-κενό.
Για να αποδείξουμε ότι το X είναι άνω φραγμένο θα βρούμε έναν αριθμό a τέτοιον ώστε: $a \geq 0$ και $a^2 \geq y$. Πράγματι, αν υπάρχει τέτοιος a, τότε για κάθε $x \in X$ θα ισχύει $x \geq 0$ και $x^2 \leq y \leq a^2$ και, επομένως, $x \leq a$ (αφού από την $x^2 \leq a^2$ και από τις $x \geq 0$, $a \geq 0$ συνεπάγεται $x \leq a$). Άρα ένας τέτοιος a είναι άνω φράγμα του X. Μένει να βρούμε τον a. Να δυο τέτοιοι συγκεκριμένοι a:

$$a = y + 1 \quad \text{και} \quad a = \max\{y, 1\}.$$

Για παράδειγμα, ο $a = y + 1$ είναι προφανώς ≥ 1 και, επομένως, ≥ 0 και, επειδή είναι ≥ 1, έχουμε

$$a^2 = (y + 1)^2 \geq y + 1 \geq y.$$

Αποδείξτε μόνοι σας ότι και ο $a = \max\{y, 1\}$ ικανοποιεί τις $a \geq 0$ και $a^2 \geq y$.
Άρα το X είναι άνω φραγμένο.
Άρα το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Συμβολίζουμε

$$\xi = \sup X.$$

Ισχύει

$$\xi \geq 0,$$

διότι ο 0 είναι στοιχείο του X και ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$\xi^2 = y$$

και έτσι θα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^2 = y$. Αυτό θα γίνει αποκλείοντας τις σχέσεις $\xi^2 < y$ και $\xi^2 > y$. Με άτοπο!
A. Έστω $\xi^2 < y$.
Ισχυρίζομαι ότι αν βρούμε έναν $\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $(\xi+\epsilon)^2 \leq y$ θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε. Γιατί; Διότι αν ισχύει κάτι τέτοιο, ο αριθμός $\xi + \epsilon$ ικανοποιεί τις σχέσεις $\xi + \epsilon \geq 0$ (διότι $\xi \geq 0$) και $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$, οπότε ο $\xi + \epsilon$ είναι στοιχείο του συνόλου X και αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X.
Άρα αρκεί να βρούμε έναν τέτοιον ϵ. Κατ' αρχάς, γιατί είναι αναμενόμενο να υπάρχει ένας $\epsilon > 0$ ώστε $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$; Επειδή $\xi^2 < y$, υπάρχει ένα θετικό περιθώριο από τον ξ^2 στον μεγαλύτερο y ώστε, αν αυξήσουμε τον ξ κατά μια πολύ μικρή ποσότητα ϵ, περιμένουμε ότι ο ξ^2 θα αυξηθεί μεν αλλά η αύξηση από τον ξ^2 στον $(\xi + \epsilon)^2$ θα είναι αρκετά μικρή ώστε ο $(\xi + \epsilon)^2$ να μην ξεπεράσει τον y.
Έχουμε, λοιπόν, $\xi^2 < y$ και θέλουμε να έχουμε και $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$. Ο άγνωστος είναι ο ϵ. Τώρα, θέλουμε

$$\epsilon > 0, \quad (\xi + \epsilon)^2 \leq y$$

ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq y.$$

Για να βρούμε έναν ϵ η τελευταία ανισότητα δεν βοηθά, διότι υπάρχει ο όρος ϵ^2, οπότε δεν θα αποφύγουμε τις τετραγωνικές ρίζες και ίσα-ίσα αυτές είναι το βασικό μας πρόβλημα (να αποδείξουμε την ύπαρξη τετραγωνικών ριζών). Θα προσπαθήσουμε να αποφύγουμε με έμμεσο τρόπο τον όρο ϵ^2. Σκεφτόμαστε ότι, αφού ψάχνουμε έτσι κι αλλιώς για *μικρό* αριθμό $\epsilon > 0$, δεν χάνουμε τίποτα να απαιτήσουμε να ισχύει $\epsilon \leq 1$ για τον ϵ που ψάχνουμε. Αυτό θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\epsilon^2 \leq \epsilon$ και, επομένως, την $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon$. Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε έναν ϵ ώστε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1, \quad \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon \leq y.$$

(Πράγματι, ένας τέτοιος ϵ θα ικανοποιεί, προφανώς, και την $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq y$.)
Ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1, \quad \epsilon \leq \frac{y - \xi^2}{2\xi + 1}.$$

Παρατηρήστε ότι, ακριβώς λόγω της υπόθεσης $\xi^2 < y$, ο τελευταίος αριθμός είναι > 0.
Τώρα, ο συγκεκριμένος αριθμός

$$\epsilon = \min\left\{1, \frac{y - \xi^2}{2\xi + 1}\right\}$$

ικανοποιεί τις ανισοτικές σχέσεις που θέλουμε: είναι θετικός αφού είναι ο μικρότερος δυο θετικών αριθμών και για τον ίδιο λόγο δεν υπερβαίνει κανέναν από αυτούς τους δυο αριθμούς. Άρα βρήκαμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί την $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$ και, επομένως, έχουμε άτοπο!
B. Έστω $\xi^2 > y$.

Τώρα ισχυρίζομαι ότι αν βρούμε έναν $\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $\epsilon \leq \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \geq y$ θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε. Γιατί; Διότι αν ισχύει κάτι τέτοιο, ο αριθμός $\xi - \epsilon$ είναι ≥ 0 και για κάθε $x \in X$ θα ισχύει $x^2 \leq y \leq (\xi - \epsilon)^2$ και, επομένως, θα ισχύει $x \leq \xi - \epsilon$ (αφού από την $x^2 \leq (\xi - \epsilon)^2$ και από τις $x \geq 0, \xi - \epsilon \geq 0$ συνεπάγεται $x \leq \xi - \epsilon$). Άρα ο $\xi - \epsilon$ θα είναι άνω φράγμα του X και αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του X.
Άρα αρκεί να βρούμε έναν τέτοιον ϵ. Και πάλι, γιατί είναι αναμενόμενο να υπάρχει ένας $\epsilon > 0$ ώστε $\epsilon \leq \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \geq y$; Επειδή $\xi^2 > y$, υπάρχει ένα θετικό περιθώριο από τον ξ^2 στον μικρότερο y ώστε, αν μειώσουμε τον ξ κατά μια πολύ μικρή ποσότητα ϵ, περιμένουμε ότι ο ξ^2 θα μειωθεί μεν αλλά η μείωση από τον ξ^2 στον $(\xi - \epsilon)^2$ θα είναι αρκετά μικρή ώστε ο $(\xi - \epsilon)^2$ να μην πέσει κάτω από τον y.
Έχουμε, λοιπόν, $\xi^2 > y$ και θέλουμε να έχουμε και $(\xi - \epsilon)^2 \geq y$. Ο άγνωστος είναι ο ϵ. Τώρα, θέλουμε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq \xi, \quad (\xi - \epsilon)^2 \geq y$$

ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq \xi \quad \xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \geq y.$$

Επειδή $\xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \geq \xi^2 - 2\xi\epsilon$, αρκεί να βρούμε έναν ϵ ώστε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq \xi, \quad \xi^2 - 2\xi\epsilon \geq y.$$

(Ένας τέτοιος ϵ θα ικανοποιεί, προφανώς, και την $\xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \geq y$.)
Ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq \xi, \quad \epsilon \leq \frac{\xi^2 - y}{2\xi}.$$

Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης $\xi^2 > y$, ο τελευταίος αριθμός είναι > 0. Τώρα, ο συγκεκριμένος αριθμός

$$\epsilon = \min\left\{\xi, \frac{\xi^2 - y}{2\xi}\right\}$$

ικανοποιεί τις ανισοτικές σχέσεις που θέλουμε: είναι θετικός αφού είναι ο μικρότερος δυο θετικών αριθμών και για τον ίδιο λόγο δεν υπερβαίνει κανέναν από αυτούς τους δυο αριθμούς. Άρα βρήκαμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί τις $\epsilon \leq \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \geq y$ και, επομένως, έχουμε άτοπο!
Όπως είπαμε ήδη, από τα A και B συνεπάγεται ότι $\xi^2 = y$.
Από τη στιγμή που αποδείξαμε την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^2 = y$, η απόδειξη της μοναδικότητας είναι στοιχειώδης: αν $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ και ${\xi_1}^2 = y = \xi_2^2$, συνεπάγεται αμέσως ότι $\xi_1 = \xi_2$. □

Σχόλιο: Στο μάθημα παρέλειψα το μέρος B της προηγούμενης απόδειξης επειδή δεν έφτασε ο χρόνος. Διαβάστε το!

Το Θεώρημα που αποδείξαμε είναι η ειδική περίπτωση για $n = 2$ του Θεωρήματος 1.2 του βιβλίου:

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$ η εξίσωση $x^n = y$ έχει μοναδική μη-αρνητική λύση.*

Η απόδειξη για γενικό $n \geq 2$, η οποία υπάρχει στο βιβλίο, είναι λίγο πιο περίπλοκη τεχνικά από την απόδειξη για την ειδική περίπτωση $n = 2$, την οποία είδαμε προηγουμένως. Όποιος θέλει ας διαβάσει την γενική απόδειξη. Όμως, επειδή οι κεντρικές ιδέες αναπτύσσονται και στην παραπάνω απόδειξη στην περίπτωση $n = 2$, δεν είναι απόλυτη ανάγκη να διαβάσετε την γενική απόδειξη.

ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Την προηγούμενη φορά αναφέραμε (και αποδείξαμε στην περίπτωση $n = 2$) το θεώρημα που λέει ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει μοναδική μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$. Ο μη-αρνητικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του y και συμβολίζεται

$$\sqrt[n]{y}.$$

Όταν $n = 2$ γράφουμε $\sqrt{y}$ αντί $\sqrt[2]{y}$.
Με άλλα λόγια έχουμε την ισοδυναμία

$$x = \sqrt[n]{y} \iff x \geq 0, x^n = y.$$

Σχόλιο: Πρέπει να τονιστεί ότι η n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{y}$ ορίζεται μόνο για $y \geq 0$.

Στο λύκειο έχει αποδειχθεί ότι κανένας ρητός αριθμός δεν ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 2$. Ένα λίγο γενικότερο αποτέλεσμα αποδεικνύεται στην Πρόταση 1.6 του βιβλίου (δεν το αποδεικνύω στο μάθημα διότι είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης). Εμείς μόλις πριν λίγο αποδείξαμε ότι *υπάρχει* μη-αρνητικός αριθμός που ικανοποιεί την $x^2 = 2$ και μάλιστα τον συμβολίσαμε $\sqrt{2}$. Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ (που υπάρχει) είναι άρρητος. Άρρητοι ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί και μόλις τώρα αποδείξαμε την ύπαρξη τουλάχιστον ενός τέτοιου άρρητου αριθμού! Με άλλα λόγια, τώρα γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κενό (Πρόταση 1.7 στο βιβλίο). Μπορούμε, όμως, να πούμε και περισσότερα: οι άρρητοι αριθμοί όχι μόνο υπάρχουν αλλά είναι και πολλοί. Οι άρρητοι, όπως και οι ρητοί, είναι πυκνοί.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε με έναν έξυπνο τρόπο την πυκνότητα των ρητών. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε άρρητο, για παράδειγμα τον $\sqrt{2}$. Επειδή $a < b$, συνεπάγεται $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, οπότε υπάρχει ρητός r ώστε

$$a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}.$$

Συνεπάγεται

$$a < r + \sqrt{2} < b$$

και βλέπουμε αμέσως ότι ο $r + \sqrt{2}$ είναι άρρητος. □

Τώρα θα κάνουμε μια επισκόπηση της έννοιας της "δύναμης αριθμού σε αριθμό" με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα αλλά χωρίς να επιμείνουμε σε τεχνικές λεπτομέρειες.

Κατ' αρχάς, από το γυμνάσιο ακόμη, ορίζεται η δύναμη αριθμού με ακέραιο εκθέτη ως εξής:

$$\begin{array}{ll} y^n = y \cdots y \ \ (n \text{ φορές}) & \text{αν ο } n \text{ είναι φυσικός} \\ y^0 = 1 & \text{αν } y \neq 0 \\ y^n = \dfrac{1}{y^{-n}} = \dfrac{1}{y \cdots y \ \ (-n \text{ φορές})} & \text{αν ο } n \text{ είναι αρνητικός ακέραιος και } y \neq 0. \end{array}$$

Όταν θέλουμε να ορίσουμε την δύναμη $y^{\frac{1}{n}}$ με εκθέτη αντίστροφο φυσικού, συνειδητοποιούμε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο $y \cdots y$ διότι δεν έχει νόημα η έκφραση "$\frac{1}{n}$ φορές". Ο ορισμός της δύναμης $y^{\frac{1}{n}}$ είναι ο εξής: $y^{\frac{1}{n}}$ είναι η μοναδική μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[n]{y}$, η n-οστή ρίζα του y, που ορίσαμε προηγουμένως:

$$y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \qquad \text{αν ο } n \text{ είναι φυσικός και } y \geq 0.$$

Γενικότερα, αν ο r είναι ρητός (αλλά όχι ακέραιος) και τον γράψουμε $r = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m \qquad \begin{array}{l} \text{αν } r \text{ είναι ρητός } > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \text{ή} \\ \text{αν } r \text{ είναι ρητός } \leq 0 \text{ και } y > 0. \end{array}$$

Σχόλιο: Αν ο r είναι ρητός αλλά όχι ακέραιος, δεν ορίζεται η δύναμη y^r για $y < 0$.

Στην περίπτωση της δύναμης y^x με άρρητο x η κατάσταση είναι πολύ πιο περίπλοκη. Για παράδειγμα, ένας τρόπος να ορισθεί η δύναμη

$$y^{\sqrt{2}}$$

είναι ο εξής. Σκεφτόμαστε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ο αριθμός $1.41\ldots$ και ότι οι λεγόμενες *διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις* του $\sqrt{2}$ είναι οι ρητοί αριθμοί

$$1, \quad 1.4 = \frac{14}{10}, \quad 1.41 = \frac{141}{100} \quad \text{κλπ.}$$

Επειδή αυτοί οι διαδοχικοί ρητοί αριθμοί προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ θα πρέπει και οι διαδοχικές δυνάμεις

$$y^1, \quad y^{1.4} = (\sqrt[10]{y})^{14}, \quad y^{1.41} = (\sqrt[100]{y})^{141} \quad \text{κλπ}$$

να προσεγγίζουν τον $y^{\sqrt{2}}$. Έτσι, λοιπόν, μπορεί να ορισθεί ο $y^{\sqrt{2}}$ ως το όριο των αριθμών y^{r_n}, όπου r_n είναι η n-οστή δεκαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$. Προσέξτε: οι δυνάμεις y^{r_n} έχουν ορισθεί προηγουμένως, αφού κάθε r_n είναι ρητός αριθμός. Προφανώς, αυτό μπορεί να γίνει για κάθε άρρητο εκθέτη x, θεωρώντας τις διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να παρουσιαστεί αργότερα, αφού πρώτα μιλήσουμε για τις έννοιες της "ακολουθίας" και του "ορίου". Στην παρούσα φάση ταιριάζει καλύτερα ένας άλλος τρόπος ορισμού της δύναμης y^x με άρρητο εκθέτη x.

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $y > 1$. Ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Δηλαδή, θεωρούμε τις δυνάμεις του y με εκθέτες *όλους* τους ρητούς που είναι $< x$. Ενώ προηγουμένως θεωρήσαμε τις δυνάμεις του y με εκθέτες, από τους ρητούς που είναι $< x$, μόνο τις δεκαδικές προσεγγίσεις του x.

Η διαδικασία τώρα έχει ως εξής. Αποδεικνύουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο. Αν το κάνουμε αυτό, συνεπάγεται ότι το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Τέλος, ορίζουμε

$$y^x = \sup X = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\} \qquad \text{αν } y > 1 \text{ και ο } x \text{ είναι άρρητος.}$$

Στις περιπτώσεις $y = 1$ και $0 < y < 1$ ορίζουμε

$$1^x = 1 \qquad \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος}$$
$$y^x = \left(\frac{1}{y}\right)^{-x} \qquad \text{αν } 0 < y < 1 \text{ και ο } x \text{ είναι άρρητος.}$$

(Στην περίπτωση $0 < y < 1$ είναι $\frac{1}{y} > 1$ και ο $-x$ είναι άρρητος, οπότε ο $(\frac{1}{y})^{-x}$ έχει ορισθεί στην πρώτη περίπτωση.)
Τέλος, ορίζουμε

$$0^x = 0 \qquad \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος } > 0.$$

Σχόλιο: Αν ο x είναι άρρητος, δεν ορίζεται η δύναμη y^x για $y < 0$.

Μετά από κάθε ορισμό ακολουθούν οι αντίστοιχες ιδιότητες. Όταν ορίζονται οι δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, αποδεικνύονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες. Για παράδειγμα η γνωστή ιδιότητα $y^{n+m} = y^n y^m$. Αφού ορισθούν οι δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, αποδεικνύονται οι ίδιες ιδιότητες αλλά για ρητούς εκθέτες. Τέλος, αφού ορισθούν οι δυνάμεις με άρρητους εκθέτες, αποδεικνύονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με γενικούς πραγματικούς εκθέτες. Σε κάθε στάδιο χρησιμοποιούνται οι ήδη αποδειχθείσες ιδιότητες στα προηγούμενα στάδια.

Τέλος, φτάνουμε στην εξίσωση

$$a^x = y$$

με δοσμένο $a > 0, a \neq 1$, όπου ο y παίρνει τιμές > 0 και ο x είναι άγνωστος και έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $a^x = y$ με άγνωστο x έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση $a > 1$ και $y > 1$ ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, a^x \leq y\},$$

αποδεικνύουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, συμπεραίνουμε ότι έχει supremum το οποίο είναι αριθμός, θέτουμε

$$\xi = \sup X$$

και αποδεικνύουμε ότι $a^\xi = y$, δηλαδή ότι το supremum του X είναι λύση της $a^x = y$. Κατόπιν, χειριζόμαστε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις για τους a, y με βάση την πρώτη περίπτωση.
Τέλος, αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της λύσης.
(Όπως είπαμε παραπάνω, παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. Το Θεώρημα αυτό είναι το Θεώρημα 1.3 του βιβλίου.) ☐

Ακολουθούν οι ιδιότητες των λογαρίθμων.

Κάναμε, λοιπόν, μια σκιαγράφηση της εισαγωγής της έννοιας της δύναμης και της έννοιας του λογαρίθμου. Σκοπός ήταν να γίνει κατανοητός ο ρόλος της Ιδιότητας Supremum στους ορισμούς των εννοιών: στην ύπαρξη n-οστών ριζών (η προϋπόθεση για να ορισθούν οι δυνάμεις με ρητούς μη-ακέραιους εκθέτες), στον ορισμό των δυνάμεων με άρρητους εκθέτες και στον ορισμό των λογαρίθμων. Όλα αυτά περιγράφονται με σχετική πληρότητα στην ενότητα 1.4 του βιβλίου. *Σε πρώτη ανάγνωση μπορεί κάποιος να μην διαβάσει τα Λήμματα 1.2, 1.3 και 1.4, την απόδειξη της Πρότασης 1.8 (η* *οποία περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων) και την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.* Όλα αυτά περιέχουν πολλές τεχνικές λεπτομέρειες και είναι αρκετά κουραστικά ειδικά σ' αυτό το στάδιο των σπουδών. Για το μάθημα Ανάλυση 1 θεωρώ ότι είναι υπεραρκετό να καταλάβετε πλήρως την απόδειξη της ύπαρξης των n-οστών ριζών (στην περίπτωση $n = 2$) και να κατανοήσετε το γενικό περίγραμμα των εννοιών της δύναμης και του λογαρίθμου και τον ρόλο της έννοιας του supremum σ' αυτές.

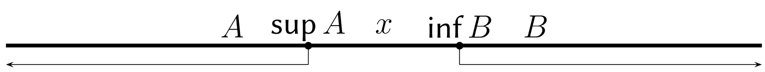
Τώρα, ασκήσεις.

Άσκηση 1.2.13. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \xi]$, $B = (\xi, +\infty)$.*

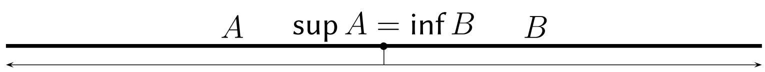
Λύση: Κατ' αρχάς η υπόθεση $A \cup B = \mathbb{R}$ λέει ότι κάθε αριθμός ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα A, B. Επίσης, η *γνήσια* ανισότητα $x < y$ λέει ότι τα A, B δεν έχουν κοινό στοιχείο. Άρα κάθε αριθμός ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A, B. Με άλλα λόγια τα A, B αποτελούν *διαμέριση* του $\mathbb{R}$.
Τώρα, βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 1.2.12[α], συμπεραίνουμε ότι

$$\sup A \leq \inf B.$$

Προφανώς, το σύνολο A βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) του $\sup A$ και το B βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του $\inf B$. Προσπαθώντας να σχεδιάσουμε την κατάσταση, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν $\sup A < \inf B$.



Όμως, σ' αυτήν την περίπτωση κάθε αριθμός στο ανοικτό διάστημα ανάμεσα στους $\sup A, \inf B$, για παράδειγμα ο $\frac{\sup A + \inf B}{2}$, δεν ανήκει σε κανένα από τα σύνολα A, B. Άρα μένει η περίπτωση $\sup A = \inf B$.



Θέτουμε

$$\xi = \sup A = \inf B.$$

Τώρα, κάθε $x < \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο B, οπότε ανήκει στο A. Επίσης, κάθε $x > \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο A, οπότε ανήκει στο B. Τέλος, ο ίδιος ο ξ πρέπει να ανήκει σε ένα ακριβώς από τα A, B. Αν $\xi \in A$, τότε προφανώς $A = (-\infty, \xi]$ και $B = (\xi, +\infty)$. Αν $\xi \in B$, τότε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$.

Άσκηση 1.2.15. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Λύση: Η ανισότητα $\inf A \leq \sup A$ είναι γνωστή. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\inf B \leq \inf A$ και $\sup A \leq \sup B$.
Θα αποδείξουμε την δεύτερη ανισότητα με τα supremum και θα αποδείξετε εσείς την πρώτη ανισότητα με παρόμοιο τρόπο.
Πρώτος τρόπος: Σκεφτόμαστε ότι το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή

ίσο ενός αριθμού ισοδυναμεί με το να είναι ο αριθμός αυτός άνω φράγμα του συνόλου. Όταν, λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $\sup A \leq \sup B$, είναι αρκετό (και μάλιστα ισοδύναμο) να αποδείξουμε ότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A.
Πράγματι, για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, οπότε ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και, επομένως, $\sup A \leq \sup B$.

Ανοίγει παρένθεση: Στα προηγούμενα δεν διακρίναμε περιπτώσεις για το αν τα σύνολα είναι άνω φραγμένα ή όχι: εξ άλλου στην πρώτη πρόταση "το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή ίσο ενός αριθμού ισοδυναμεί με το να είναι ο αριθμός αυτός άνω φράγμα του συνόλου" μιλάμε για "αριθμό" ενώ στα επόμενα δεν αναφερόμαστε στο αν το $\sup B$ (που παίζει τον ρόλο του "αριθμού") είναι αριθμός ή $+\infty$. Αυτό, όμως, είναι στην πραγματικότητα ακίνδυνο. Σε όλες τις προτάσεις που αποτελούν την παραπάνω απόδειξη οι διάφορες ποσότητες "supremum" και "άνω φράγμα" μπορούν να ερμηνευθούν είτε ως αριθμοί είτε ως $+\infty$ χωρίς κίνδυνο λάθους. Ας τα πάρουμε ένα-ένα. Η πρώτη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί "το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή ίσο μιας ποσότητας ισοδυναμεί με το να είναι η ποσότητα αυτή άνω φράγμα του συνόλου". Εδώ η ποσότητα για την οποία μιλάμε μπορεί να είναι είτε αριθμός (οπότε καταλήγουμε σε κάτι γνωστό) είτε $+\infty$, αφού το supremum ενός συνόλου είναι πάντοτε μικρότερο ή ίσο του $+\infty$ και συχρόνως το $+\infty$ είναι πάντοτε άνω φράγμα ενός συνόλου. Η δεύτερη πρόταση "για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, οπότε ισχύει $x \leq \sup B$" είναι σωστή είτε το $\sup B$ είναι αριθμός (δηλαδή το B είναι άνω φραγμένο) είτε το $\sup B$ είναι $+\infty$ (δηλαδή το B δεν είναι άνω φραγμένο). Τέλος, η τρίτη πρόταση "το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και, επομένως, $\sup A \leq \sup B$" είναι σωστή είτε το $\sup B$ είναι αριθμός (οπότε το A είναι άνω φραγμένο και το $\sup A$ είναι κι αυτό αριθμός) είτε το $\sup B$ είναι $+\infty$ (οπότε το $\sup B = +\infty$ είναι άνω φράγμα του A και το A είναι είτε άνω φραγμένο είτε όχι άνω φραγμένο αλλά και πάλι ισχύει ούτως ή άλλως $\sup A \leq \sup B = +\infty$).
Αν κάποιος θέλει να αισθάνεται ασφαλής με τους όρους που χρησιμοποιεί, μπορεί να είναι τυπικός και να διακρίνει περιπτώσεις. Ας το κάνουμε.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\sup A \leq \sup B$ με την υπόθεση $A \subseteq B$.
Έστω ότι το B είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup B < +\infty$. Επειδή για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα το A είναι άνω φραγμένο και ο (αριθμός) $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Άρα $\sup A \leq \sup B$.
Έστω ότι το B δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup B = +\infty$. Τότε, όμως, η ανισότητα $\sup A \leq \sup B$ είναι σωστή είτε το $\sup A$ είναι αριθμός είτε το $\sup A$ είναι $+\infty$.
Κλείνει η παρένθεση.

Δεύτερος τρόπος: Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $\sup B < \sup A$.
Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε

$$\sup B < x \leq \sup A.$$

Όμως, επειδή $x \in A$ πρέπει να είναι $x \in B$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι $\sup B < x$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 1.3.3. *Βρείτε το infimum και το supremum του συνόλου*

$$(a,b) \cap \mathbb{Q} = \{r \mid a < r < b, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Λύση: Κατ' αρχάς προσπαθούμε να σχεδιάσουμε το σύνολο $A = (a,b) \cap \mathbb{Q}$.

Είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε το σύνολο A με απόλυτη πιστότητα. Το σύνολο A έχει άπειρα στοιχεία και μάλιστα, λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε υποδιάστημα του (a, b), οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A. Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το A με μια *πλήρη, συνεχή γραμμή* ανάμεσα στα a, b, διότι και οι άρρητοι είναι πυκνοί. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε υποδιάστημα του (a, b) υπάρχουν άπειροι άρρητοι, δηλαδή άπειρα στοιχεία εκτός του A. Φτιάχνουμε μια "σχετικά επαρκή" εικόνα του A αν ζωγραφίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία (στοιχεία του A) ανάμεσα στους a, b φροντίζοντας συγχρόνως να υπάρχουν όσο το δυνατό περισσότερα κενά (στοιχεία εκτός του A) ανάμεσα στα προηγούμενα σημεία. Απλοϊκά: τα στοιχεία του A είναι "παντού" στο διάστημα (a, b) αλλά και τα στοιχεία εκτός του A είναι "παντού" στο (a, b).
Είναι σαφές από το σχήμα ότι ο b είναι άνω φράγμα του A αλλά και ότι όσο κοντά θέλουμε στον b υπάρχει στοιχείο του A. Άρα ο b είναι το supremum του A.
Ας εργαστούμε, όμως, με λίγο πιο τυπική μαθηματική γλώσσα.
Προφανώς, ο b είναι άνω φράγμα του A (διότι το A περιέχεται στο (a, b)).
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι κάποιος $u < b$ είναι άνω φράγμα του A. Είναι προφανές ότι $a \leq u$, διότι δεν υπάρχει στοιχείο του A δεξιά του a. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει ρητός r ώστε $u < r < b$. Συνεπάγεται $a < r < b$ (διότι $a \leq u$), οπότε ο r είναι στοιχείο του A. Άρα υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $> u$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού το u είναι άνω φράγμα του A.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του A που να είναι $< b$, οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A είναι ο b.
Αποδείξτε με τον ίδιο τρόπο ότι $a = \inf A$ και, κατόπιν, λύστε και την άσκηση 1.4.1 με το σύνολο

$$(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \,|\, a < x < b, x \notin \mathbb{Q}\}.$$

ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1.2.16. [γ] *Για τα μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε*

$$A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Λύση: Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.
Για να το πετύχουμε, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $A + B$ (είτε αυτή η ποσότητα είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$).
Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup A$ και για κάθε $y \in B$ ισχύει $y \leq \sup B$. Προσθέτουμε και έχουμε ότι για κάθε $x \in A$, $y \in B$ ισχύει

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

(Σ' αυτήν την πράξη δεν υπάρχει πρόβλημα ακόμη κι αν ένα ή και τα δύο από τα $\sup A$, $\sup B$ είναι $+\infty$.)
Άρα η ποσότητα $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$, οπότε

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

(Υπονοείται ότι: αν το $\sup A + \sup B$ είναι αριθμός, τότε το $A + B$ είναι άνω φραγμένο και το ελάχιστο άνω φράγμα του είναι $\leq$ από το $\sup A + \sup B$ ενώ, αν το $\sup A + \sup B$ είναι $+\infty$ τότε είναι αυτομάτως άνω φράγμα του $A + B$ και αυτομάτως ισχύει $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ είτε το $\sup(A + B)$ είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$.)
Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ και η απόδειξη θα τελειώσει.
Πρώτος τρόπος. Για κάθε $x \in A$, $y \in B$ το $x + y$ είναι στοιχείο του $A + B$, οπότε ισχύει

$$x + y \leq \sup(A + B).$$

Τώρα *σταθεροποιούμε προσωρινά* ένα τυχόν $y \in B$ και έχουμε ότι ισχύει

$$x \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\sup(A + B) - y$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A (σκεφτείτε πάλι τις πιθανές περιπτώσεις $\sup(A + B) - y < +\infty$ και $\sup(A + B) - y = +\infty$). Συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\sup A \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $y \in B$. (Αποσταθεροποιούμε τον τυχόντα $y \in B$ που είχαμε προσωρινά σταθεροποιήσει.)
Τώρα, στην τελευταία ανισότητα οι $\sup A$ και y θα αλλάξουν πλευρές. Με τον y δεν υπάρχει πρόβλημα διότι είναι αριθμός. Όμως δεν μπορεί να γίνει το ίδιο με το $\sup A$ αν είναι $+\infty$. Γι αυτό διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Αν το $\sup A$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$y \leq \sup(A + B) - \sup A$$

για κάθε $y \in B$. Άρα η ποσότητα $\sup(A+B) - \sup A$ είναι άνω φράγμα του B, οπότε

$$\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$$

και (πάλι επειδή το $\sup A$ είναι αριθμός) συνεπάγεται

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B).$$

Αν $\sup A = +\infty$, τότε από την ανισότητα $\sup A \leq \sup(A+B) - y$ στην οποία είχαμε φτάσει πριν διακρίνουμε περιπτώσεις συνεπάγεται ότι επίσης $\sup(A+B) = +\infty$ και, επομένως, η ανισότητα

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$$

στην οποία θέλουμε να καταλήξουμε ισχύει ως ισότητα.
Δεύτερος τρόπος: Υποθέτουμε ότι

$$\sup(A+B) < \sup A + \sup B$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Τότε βλέπουμε αμέσως ότι το $\sup(A+B)$ είναι αναγκαστικά αριθμός. Δηλαδή το σύνολο $A+B$ είναι άνω φραγμένο, οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει

$$x + y \leq u$$

για κάθε $x \in A, y \in B$. Παίρνοντας οποιονδήποτε $y_0 \in B$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$x \leq u - y_0$$

για κάθε $x \in A$. Άρα το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup A$ είναι αριθμός. Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι και το B είναι άνω φραγμένο, οπότε και το $\sup B$ είναι αριθμός. Δηλαδή στην ανισότητα

$$\sup(A+B) < \sup A + \sup B$$

όλες οι ποσότητες είναι αριθμοί.
Τώρα η ιδέα είναι να βρούμε ένα $x \in A$ πολύ κοντά στο $\sup A$ και ένα $y \in B$ πολύ κοντά στο $\sup B$ έτσι ώστε το $x + y$ να είναι πολύ κοντά στο $\sup A + \sup B$. Πόσο κοντά; Κοντύτερα από όσο είναι το $\sup(A+B)$ στο $\sup A + \sup B$. Αυτό θα δώσει ότι το $x+y$ είναι μεγαλύτερο από το $\sup(A+B)$ και θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε.
Θέτουμε

$$\epsilon = (\sup A + \sup B) - \sup(A+B) > 0.$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A$$

και ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε

$$\sup B - \frac{\epsilon}{2} < y \leq \sup B.$$

Προσθέτουμε και έχουμε ότι γι αυτό το $x \in A$ και γι αυτό το $y \in B$ ισχύει

$$(\sup A + \sup B) - \epsilon < x + y$$

και, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του ϵ,

$$\sup(A+B) < x+y.$$

Όμως, το $x+y$ είναι στοιχείο του $A+B$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 1.3.5 (Παραλλαγή). *Αν ισχύει $r \geq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r > b$, αποδείξτε ότι $b \geq a$.*

Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

Λύση: Πρώτο ερώτημα.
Έστω (για άτοπο) $b < a$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $b < r < a$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η υπόθεση λέει ότι κάθε ρητός που είναι $> b$ πρέπει να είναι και $\geq a$.

Δεύτερο ερώτημα.
Η υπόθεση λέει ότι οι ρητοί που είναι $< a$ είναι οι ίδιοι με τους ρητούς που είναι $< b$. Έστω (για άτοπο) $a < b$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < r < b$. Άρα υπάρχει ρητός που είναι $< b$ αλλά δεν είναι $< a$ και αυτό είναι άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει άτοπο αν $b < a$. Άρα $a = b$.

Άσκηση 1.3.2 (Παραλλαγή). *Βρείτε το supremum και το infimum καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $B = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) $C = \{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Λύση: (i) Σχεδιάζουμε το σύνολο $A = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Το σύνολο A περιέχει όλους τους θετικούς άρτιους και όλους τους αρνητικούς περιττούς. Είναι σαφές ότι το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.
Αν το σύνολο ήταν άνω φραγμένο θα υπήρχε αριθμός u ώστε να ισχύει

$$2k \leq u$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$k \leq \frac{u}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Άρα το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$.
Αν το σύνολο ήταν κάτω φραγμένο θα υπήρχε αριθμός l ώστε να ισχύει

$$l \leq -(2k-1)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$k \leq \frac{-l+1}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Άρα το σύνολο δεν είναι κάτω φραγμένο, οπότε $\inf A = -\infty$.

(ii) Σχεδιάζουμε το σύνολο $B = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ βλέποντας ότι από τους περιττούς φυσικούς n προκύπτουν τα στοιχεία $-1 - \frac{1}{2k-1}$, δηλαδή τα

$$-1 - 1 = -2, \quad -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}, \quad -1 - \frac{1}{5} = -\frac{6}{5} \qquad \text{κλπ}$$

ενώ από τους άρτιους φυσικούς προκύπτουν τα στοιχεία $1 - \frac{1}{2k}$, δηλαδή τα

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad \text{κλπ}$$

Τα πρώτα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[-2, -1]$ ενώ τα δεύτερα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$.
Είναι προφανές ότι το μικρότερο στοιχείο του B είναι ο -2, οπότε

$$\inf B = \min B = -2.$$

Το supremum του B θα προκύψει από τα δεύτερα στοιχεία τα οποία “πλησιάζουν” τον αριθμό 1, ο οποίος είναι άνω φράγμα του B.
Προφανώς, ο 1 είναι άνω φράγμα του B.
Αν υπήρχε άνω φράγμα $u < 1$ του B, τότε θα ίσχυε

$$1 - \frac{1}{2k} \leq u < 1$$

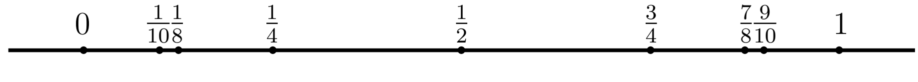
για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε

$$k \leq \frac{1}{2(1-u)}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
(Με άλλο τρόπο: θα ίσχυε $0 < 2(1-u) \leq 1k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αλλά αυτό είναι άτοπο βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας.)
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του B το οποίο να είναι < 1, οπότε

$$\sup B = 1.$$

(iii) Σχεδιάζουμε το $C = \{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.



Όλα τα στοιχεία του C βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$. Κάποια από αυτά “πλησιάζουν” τον 0 και κάποια άλλα “πλησιάζουν” τον 1.
Ο 1 είναι προφανώς άνω φράγμα του C. Αν υπήρχε άνω φράγμα $u < 1$ του C, θα ίσχυε

$$1 - \frac{1}{2n} \leq u < 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε

$$0 < 2(1-u) \leq \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο εξ αιτίας της Αρχιμήδειας Ιδιότητας.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του C που να είναι < 1, οπότε

$$\sup C = 1.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\inf C = 0.$$

Στο επόμενο μάθημα θα μιλήσουμε πιο τυπικά για ακολουθίες, αλλά μια και έχετε ξαναδεί την έννοια της ακολουθίας στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού 1, στον λίγο χρόνο που έμεινε θα δούμε μια άσκηση για ακολουθίες.

Άσκηση 2.1.6. *Είναι οι ακολουθίες* $(\frac{13^n}{n!})$ *και* $(\frac{n^{30}}{2^n})$ *μονότονες; άνω φραγμένες;*

Λύση: Για να δούμε αν μια ακολουθία είναι μονότονη συνήθως κοιτάμε τους πρώτους όρους της. Όμως, πολλές φορές αυτό είναι παραπλανητικό.
Οι πρώτοι όροι της πρώτης ακολουθίας

$$x_n = \frac{13^n}{n!}$$

είναι οι

$$\frac{13^1}{1!} = 13, \quad \frac{13^2}{2!} = 84.5, \quad \frac{13^3}{3!} = 366.16\ldots, \quad \frac{13^4}{4!} = 1190.04\ldots \qquad \text{κλπ}$$

Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Πρέπει, όμως, να το αποδείξουμε. Ελέγχουμε, λοιπόν, αν ισχύει

$$\frac{13^n}{n!} < \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$$

για κάθε n ή τουλάχιστον για ποιούς φυσικούς n ισχύει κάτι τέτοιο.
Εύκολα βλέπουμε ότι η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την

$$n < 12$$

ενώ η αντίθετη ανισότητα

$$\frac{13^n}{n!} > \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$$

ισοδυναμεί με

$$n > 12.$$

Άρα ισχύει

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{11} < x_{12} = x_{13} > x_{14} > x_{15} > \ldots$$

και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον δέκατο τρίτο όρο της).
Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο $x_{12} = x_{13} = \frac{13^{12}}{12!}$.
Οι πρώτοι όροι της δεύτερης ακολουθίας

$$x_n = \frac{n^{30}}{2^n}$$

είναι οι
$$\frac{1^{30}}{2^1}=0.5, \quad \frac{2^{30}}{2^2}, \quad \frac{3^{30}}{2^3}, \quad \frac{4^{30}}{2^4}\dots \qquad \text{κλπ}$$
Ο πρώτος όρος είναι μικρός. Ο δεύτερος όρος είναι τόσο μεγάλος που δεν επιχειρούμε καν να γράψουμε τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι τόσο μεγάλος που πλησιάζει την εκτίμηση για το πλήθος των μορίων του σύμπαντος! Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι ακόμη πιο μεγάλοι! Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Ελέγχουμε, πάλι, για ποιούς φυσικούς n ισχύει
$$\frac{n^{30}}{2^n}<\frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}.$$
Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την
$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{30}$$
κι αυτή με την
$$\sqrt[30]{2}<1+\frac{1}{n}$$
κι αυτή με την
$$n<\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}.$$
Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}$ είναι ένας πολύ μεγάλος άρρητος (γιατί;) αριθμός και, αν θέσουμε
$$n_0=\left[\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}\right],$$
(οπότε $n_0<\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}<n_0+1$) τότε η ανισότητα
$$\frac{n^{30}}{2^n}<\frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$$
ισοδυναμεί με
$$n\le n_0$$
ενώ η αντίθετη ανισότητα
$$\frac{n^{30}}{2^n}>\frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$$
ισοδυναμεί με
$$n\ge n_0+1.$$
Άρα ισχύει
$$x_1<x_2<\ldots<x_{n_0}<x_{n_0+1}>x_{n_0+2}>x_{n_0+3}>\ldots$$
και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον (n_0+1)-οστό όρο της). Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο x_{n_0+1}.

ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ακολουθία είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πραγματικές τιμές:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Παραδοσιακά, τις τιμές της συνάρτησης/ακολουθίας τις γράφουμε x_n αντί $x(n)$. Δηλαδή

$$x_n = x(n) \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η τιμή x_n ονομάζεται n-**οστός όρος** της συνάρτησης/ακολουθίας. Επίσης, την συνάρτηση/ακολουθία την συμβολίζουμε

$$(x_n) \qquad \text{ή} \qquad (x_n)_{n=1}^{+\infty}$$

ή πιο απλά

$$x_1, x_2, x_3, \ \ldots\ .$$

Στην τελευταία περίπτωση γράφουμε αρκετούς αρχικούς όρους της ακολουθίας έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να "καταλάβει" ποιά ακριβώς είναι η ακολουθία, δηλαδή να καταλάβει ποιός είναι ο n-οστός όρος της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ με n-οστό όρο $x_n = (-1)^{n-1}$ γράφεται

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ \ldots\ .$$

Βλέποντας κάποιος ότι οι οκτώ αρχικοί όροι είναι διαδοχικά "συν ένα" και "πλην ένα" καταλαβαίνει ότι η ίδια διαδικασία συνεχίζεται ασταμάτητα: ο ένατος όρος είναι 1, ο δέκατος είναι -1 κλπ. Βέβαια, για να είμαστε απολύτως ακριβείς, κανένας δεν απαγορεύει την ύπαρξη μιας ακολουθίας με αρχικούς όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 0, 0, \ \ldots\ .$$

Γι αυτό μια ακολουθία ορίζεται *αυστηρά* μόνο αν περιγράψουμε τον n-οστό όρο της (μέσω ένος μαθηματικού τύπου, για παράδειγμα). Πάντως, θα είναι αποδεκτή και η απλή παράθεση αρκετών αρχικών όρων μιας ακολουθίας αρκεί από αυτούς να μπορεί να καταλάβει ο επαρκώς υποψιασμένος αναγνώστης τον κανόνα σχηματισμού των υπόλοιπων όρων της ακολουθίας. Πάρτε ως άσκηση (αλλά μην ξοδέψετε πολύ χρόνο) να βρείτε τον τύπο του n-οστού όρου της ακολουθίας

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ \ldots\ ,$$

όπου το "τμήμα" $1, 1, -1$ επαναλαμβάνεται συνεχώς.

Δεν πρέπει να συγχέουμε μια ακολουθία με το σύνολο των όρων της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ έχει σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$ το οποίο αποτελείται από μόλις δυο στοιχεία ενώ η ακολουθία αποτελείται από άπειρους όρους: ο -1 επαναλαμβάνεται άπειρες φορές και ο 1 επαναλαμβάνεται κι αυτός άπειρες φορές. Ένα άλλο παράδειγμα: οι ακολουθίες

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ \ldots$$

και

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ \ldots$$

έχουν το ίδιο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, αλλά είναι διαφορετικές.

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **αύξουσα** αν ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε n και **φθίνουσα** αν ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ για κάθε n. Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **γνησίως αύξουσα** αν ισχύει $x_n < x_{n+1}$ για κάθε n και **γνησίως φθίνουσα** αν ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε n. Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Ένας τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της ακολουθίας. Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n και ένας τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της ακολουθίας. Τέλος, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u \qquad \text{για κάθε } n.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει

$$|x_n| \leq M \qquad \text{για κάθε } n.$$

Πράγματι, η μια κατεύθυνση είναι απλή. Αν υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n, τότε ισχύει

$$-M \leq x_n \leq M \qquad \text{για κάθε } n,$$

οπότε ο $-M$ είναι κάτω φράγμα και ο M είναι άνω φράγμα της ακολουθίας και η ακολουθία είναι φραγμένη.
Αντιστρόφως, αν η ακολουθία είναι φραγμένη, τότε υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u \qquad \text{για κάθε } n.$$

Δηλαδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι μέσα στο διάστημα $[l, u]$. Τώρα θα βρούμε ένα διάστημα συμμετρικό ως προς τον 0, δηλαδή διάστημα της μορφής $[-M, M]$, το οποίο να είναι μεγαλύτερο (με την ευρεία έννοια) από το $[l, u]$. Αν βρούμε έναν τέτοιον M, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας θα είναι μέσα στο διάστημα $[-M, M]$, δηλαδή θα ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ ή, ισοδύναμα,

$$|x_n| \leq M \qquad \text{για κάθε } n$$

και θα έχουμε τελειώσει. Πρέπει, λοιπόν, να βρούμε κάποιον M τέτοιον ώστε

$$[l, u] \subseteq [-M, M].$$

Ισοδύναμα:

$$-M \leq l \qquad \text{και} \qquad u \leq M.$$

Ισοδύναμα:

$$M \geq -l \qquad \text{και} \qquad M \geq u.$$

Ένας τέτοιος M είναι, για παράδειγμα, ο

$$M = \max\{-l, u\}$$

ή και οποιοσδήποτε μεγαλύτερος M.

Τώρα, θέλω να δώσουμε προσοχή σε δυο εκφράσεις οι οποίες θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην περιγραφή πολλών ιδιοτήτων των ακολουθιών.

Η πρώτη έκφραση είναι η "**ισχύει τελικά**" ή (το ίδιο πράγμα) "**ισχύει από κάποιον n και πέρα**". Εξηγώ: αν κάποια ιδιότητα ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή *ισχύει τελικά* αν ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0. Σ' ατήν την περίπτωση, λέμε επίσης ότι η ιδιότητα *ισχύει από τον n_0 και πέρα*. Για παράδειγμα, η ιδιότητα $\frac{1}{n} < 0.00005$ (όπου ο n είναι φυσικός) είναι ισοδύναμη με την $n > 20000$ και επομένως ισχύει από τον $n_0 = 20001$ και πέρα. Δηλαδή η ιδιότητα $\frac{1}{n} < 0.00005$ ισχύει τελικά.

Η δεύτερη έκφραση είναι η "**ισχύει για άπειρους n**". Εδώ δεν χρειάζονται περιττές εξηγήσεις: αν κάποια ιδιότητα ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n τότε είναι σαφές τί εννοούμε λέγοντας ότι η ιδιότητα αυτή *ισχύει για άπειρους n*. Για παράδειγμα, η ιδιότητα $(-1)^{n-1} > 0$ (όπου ο n είναι φυσικός) ισχύει για άπειρους n αφού ισχύει για κάθε περιττό φυσικό n.

Μερικά σχόλια.

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά, τότε η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους n.

Πράγματι, αν μια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0, τότε η αντίθετη ιδιότητα μπορεί να ισχύει μόνο για κάποιους από τους $1, 2, \ldots, n_0 - 1$ και, επομένως, το πολύ για πεπερασμένους n.

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά, τότε ισχύει και για άπειρους n.

Πράγματι, αν μια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0, τότε η ιδιότητα αυτή ισχύει για άπειρους n αφού οι φυσικοί $n \geq n_0$ είναι άπειροι.

Το αντίστροφο του προηγουμένου δεν ισχύει πάντοτε. *Υπάρχουν ιδιότητες που ισχύουν για άπειρους n αλλά όχι τελικά.*

Παράδειγμα τέτοιας ιδιότητας είναι η $(-1)^{n-1} > 0$. Είδαμε πριν ότι αυτή ισχύει για άπειρους n διότι ισχύει για κάθε περιττό n. Αλλά και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ ισχύει για άπειρους n αφού ισχύει για κάθε άρτιο n. Επομένως, η $(-1)^{n-1} > 0$ δεν ισχύει τελικά.

Αν έχουμε δυο ιδιότητες και ξέρουμε ότι καθεμιά από αυτές ξεχωριστά ισχύει τελικά, τότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει τελικά και η σύζευξή τους ή, με άλλα λόγια, ότι ισχύουν και οι δυο ταυτόχρονα τελικά.

Πράγματι, έστω ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0'$ για κάποιον κατάλληλο n_0' και έστω ότι η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0''$ για κάποιον κατάλληλο n_0''. Αν θεωρήσουμε τον $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, τότε και η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ (αφού $n_0 \geq n_0'$) και η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ (αφού $n_0 \geq n_0''$). Άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι δυο ιδιότητες για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι δυο ιδιότητες τελικά.
Για παράδειγμα, ισχύει $\frac{1}{n} < 0.05$ για κάθε $n \geq 21$ και ισχύει $2^n \geq 3452$ για κάθε $n \geq 12$. Άρα ισχύει $\frac{1}{n} < 0.05$ και $2^n \geq 3452$ για κάθε $n \geq 21 = \max\{21, 12\}$.

Άσκηση 2.1.2 (Παραλλαγή). *Βρείτε το σύνολο όρων των ακολουθιών $\big(3[\frac{n}{3}]\big)$ και $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$. Είναι οι ακολουθίες αυτές μονότονες;*

Λύση: Οι όροι της πρώτης ακολουθίας είναι οι

$$0,0,3,3,3,6,6,6,9,9,9,\ \dots\ .$$

Είναι σαφές ότι το σύνολο όρων της ακολουθίας είναι το σύνολο των μη-αρνητικών πολλαπλασίων του 3 και ότι η ακολουθία είναι αύξουσα (αλλά όχι γνησίως αύξουσα).
Οι όροι της δεύτερης ακολουθίας είναι οι

$$1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ \dots\ .$$

Τώρα το σύνολο όρων της ακολουθίας είναι το $\{0,1,2\}$ και η ακολουθία δεν είναι μονότονη (ούτε τελικά μονότονη). Η ακολουθία θα μπορούσε να περιγραφεί με τον τύπο

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{cases} 0, & \text{αν } n=3k \\ 1, & \text{αν } n=3k+1 \\ 2, & \text{αν } n=3k+2 \end{cases} \\ &= \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης } n:3. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.1.9. *Έστω ότι το σύνολο όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n=c$ για άπειρους n.*

Λύση: Άς υποθέσουμε ότι το σύνολο όρων της (x_n) είναι το

$$\{a_1,a_2,\ \dots\ a_k\}.$$

Αν πράγματι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n=c$ για άπειρους n, τότε, προφανώς, ένας τέτοιος c πρέπει να είναι ένας από τους $a_1,\ \dots\ ,a_k$. Άρα θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι κανένας από τους $a_1,\ \dots\ ,a_k$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι αν ο c είναι οποιοσδήποτε από τους $a_1,\ \dots\ ,a_k$, τότε ισχύει $x_n=c$ για το πολύ πεπερασμένους n. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{gathered} \text{ισχύει } x_n=a_1 \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n, \\ \text{ισχύει } x_n=a_2 \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n, \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \text{ισχύει } x_n=a_k \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n. \end{gathered}$$

Όμως, τότε

$$\text{ισχύει } x_n=a_1 \text{ ή } a_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } a_k \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n.$$

(Πράγματι, αν το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n=a_1$ είναι ίσο με A_1, το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n=a_2$ είναι ίσο με A_2, κλπ, και το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n=a_k$ είναι ίσο με A_k, τότε το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει μια οποιαδήποτε από τις ισότητες αυτές είναι ίσο με $A_1+A_2+\cdots+A_k$ και είναι πεπερασμένο.)
Αυτό όμως είναι προφανώς άτοπο, αφού για κάθε n (και, επομένως, για άπειρους n) ισχύει $x_n=a_1$ ή a_2 ή $\dots$ ή a_k.

Άρα υπάρχει κάποιος από τους αριθμούς $a_1, \ldots, a_k$ ώστε, αν c είναι αυτός ο αριθμός, τότε ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.

Σχόλιο: Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας c με την παραπάνω ιδιότητα. Για παράδειγμα, η ακολουθία $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχουν δύο c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = -1$ και ο $c = 1$. Όμως, η ακολουθία $1, -1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχει μόνο ένας c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = 1$.

Σχόλιο: Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα. Αν αρχίσουμε να ρίχνουμε ένα ζάρι επ' άπειρον και ονομάσουμε $x_1, x_2, \ldots$ τα διαδοχικά αποτελέσματα, τότε σχηματίζεται μια ακολουθία με πεπερασμένο σύνολο όρων: ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Είναι προφανές ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$ θα επαναληφθεί άπειρες φορές. (Αυτό δεν έχει να κάνει με το αν το ζάρι είναι "πειραγμένο" ή όχι.)

ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα δούμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Θα αρχίσουμε με την πιο απλοϊκή (κατά τη γνώμη μου) διατύπωση και θα περνάμε σε διαδοχικά πιο "μαθηματικοποιημένες" διατυπώσεις.

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **έχει όριο** τον αριθμό x ή ότι **συγκλίνει** στον αριθμό x ή ότι ο αριθμός x **είναι όριο** της (x_n) και γράφουμε

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

όταν συμβαίνει το εξής:

αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει όσο θέλουμε μικρή

ή, ισοδύναμα,

η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό (οσοδήποτε μικρό), αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) θα υπάρχει κάποιος κατάλληλος n_0 έτσι ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$.

Το "ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$" μπορούμε να το διατυπώσουμε "από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $|x_n - x| < \epsilon$" ή, ισοδύναμα, "το $|x_n - x| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $n \geq n_0$". Άρα ο παραπάνω ορισμός του ορίου διατυπώνεται και ως εξής:

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Αυτές οι διατυπώσεις και ειδικώτερα η τελευταία μας λένε τί πρέπει να κάνουμε για να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n) έχει όριο έναν συγκεκριμένο αριθμό x. *Πρέπει να θεωρήσουμε έναν γενικό αριθμό $\epsilon > 0$ (όχι συγκεκριμένο αριθμό: το σύμβολο ϵ) και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος κατάλληλος φυσικός n_0 (ο οποίος θα εξαρτάται από τον ϵ από τον οποίο ξεκινάμε) έτσι ώστε*

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Προσέξτε: *ο $\epsilon > 0$ θεωρείται δοσμένος και πρέπει να βρούμε κάποιον n_0 (ή να αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου n_0).*

Η τακτική που ακολουθούμε είναι η εξής. Γράφουμε διαδοχικές σχέσεις, ξεκινώντας με την $|x_n - x| < \epsilon$ και περνώντας από κάθε σχέση στην επόμενη σχέση με αντίστροφη συνεπαγωγή μέχρι να καταλήξουμε στην $n \geq n_0$. Δηλαδή:

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1,$$

οπότε, παίρνοντας $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Γενικά, όταν φτάνουμε σε μια σχέση της μορφής $n > a$ (όπως πριν που φτάσαμε στην $n > \frac{1}{\epsilon}$) σκεφτόμαστε ότι για να είναι ο φυσικός n μεγαλύτερος από τον αριθμό a αρκεί να είναι μεγαλύτερος (με την ευρεία έννοια) από τον ελάχιστο φυσικό ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον a και ότι ο ελάχιστος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον a είναι ο $[a] + 1$, αν $a \geq 0$, και ο 1, αν $a < 0$.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \ldots$$

και συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$c \to c,$$

δηλαδή ότι η σταθερή ακολουθία $c, c, c, \ldots$ με τύπο $x_n = c$ για κάθε n συγκλίνει στον αριθμό c.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$|c - c| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad 0 < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq 1.$$

Ψύχραιμα: στο παράδειγμα αυτό η γενική σχέση $|x_n - x| < \epsilon$ γράφεται $|c - c| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $0 < \epsilon$ και προφανώς ισχύει για κάθε n. Γι αυτό λέμε ότι: το $n \geq 1$ συνεπάγεται το $|c - c| < \epsilon$.
Εδώ, λοιπόν, ο κατάλληλος n_0 είναι ο $n_0 = 1$ (και παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητος του ϵ).

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{n+2}{n^2+1} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \epsilon n^2 - n + \epsilon - 2 > 0.$$

Παύση. Προσπαθώντας να λύσουμε την τελευταία ανισότητα ως προς n και να την φέρουμε στη μορφή $n > a$, συνειδητοποιούμε ότι αυτή είναι κάπως άβολο να λυθεί αφού θα προκύψουν σχετικά περίπλοκοι τύποι από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\epsilon n^2 - n + \epsilon - 2 = 0$. Και, επειδή θα μπορούσε να είχε προκύψει ακόμη πιο άβολη ανισότητα με δυνάμεις του n με εκθέτη μεγαλύτερο του 2 ή και ακόμη πιο περίπλοκη ανισότητα χωρίς ελπίδα επίλυσης, θα ήταν καλό να μάθουμε μια διαφορετική μέθοδο εύρεσης του κατάλληλου n_0.
Θεωρούμε την παράσταση $\frac{n+2}{n^2+1}$ του n η οποία θέλουμε να είναι $< \epsilon$ και *ψάχνουμε να βρούμε μια άλλη παράσταση A του n η οποία να είναι μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ αλλά και απλούστερη από την $\frac{n+2}{n^2+1}$*. Την θέλουμε μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ διότι τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad A < \epsilon$$

και την θέλουμε απλούστερη από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ διότι τότε η ανισότητα $A < \epsilon$ θα μπορεί να λύθεί πιο εύκολα από την $\frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon$.
Πώς βρίσκουμε μια τέτοια παράσταση A; Να ένας τρόπος (υπάρχουν πολλοί):

$$\frac{n+2}{n^2+1} \leq \frac{n+2n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Άρα, με την παράσταση $A = \frac{3}{n}$, έχουμε από την αρχή:

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{3}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n > \frac{3}{\epsilon} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\frac{3}{\epsilon}\right] + 1.$$

Επομένως, με $n_0 = [\frac{3}{\epsilon}] + 1$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Συνεχίζουμε με τον γενικό ορισμό του ορίου ακολουθίας και πάμε στην περίπτωση που το όριο δεν είναι αριθμός. Θα αρχίσουμε πάλι με την πιο απλοϊκή διατύπωση και θα περνάμε σε διαδοχικά πιο "μαθηματικοποιημένες" διατυπώσεις.

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **έχει όριο** το $+\infty$ ή ότι **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ **είναι όριο** της (x_n) και γράφουμε

$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

όταν συμβαίνει το εξής:

αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, ο x_n θα γίνει όσο θέλουμε μεγάλος

ή, ισοδύναμα,

ο x_n θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό (οσοδήποτε μεγάλο), αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) θα υπάρχει κάποιος κατάλληλος n_0 έτσι ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.

Το "ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$" μπορούμε να το διατυπώσουμε "από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $x_n > M$" ή, ισοδύναμα, "το $x_n > M$ συνεπάγεται από το $n \geq n_0$". Άρα ο παραπάνω ορισμός του ορίου διατυπώνεται και ως εξής:

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n > M$$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Όταν, λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n) έχει όριο το $+\infty$, *πρέπει να θεωρήσουμε έναν γενικό αριθμό $M > 0$ (όχι συγκεκριμένο αριθμό: το σύμβολο M) και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος κατάλληλος φυσικός n_0 (ο οποίος θα εξαρτάται από τον M από τον οποίο ξεκινάμε) έτσι ώστε*

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Προσέξτε πάλι: *ο $M > 0$ θεωρείται δοσμένος και πρέπει να βρούμε κάποιον n_0 (ή να αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου n_0).*

Η τακτική που ακολουθούμε είναι και πάλι η εξής. Γράφουμε διαδοχικές σχέσεις, ξεκινώντας με την $x_n > M$ και περνώντας από κάθε σχέση στην επόμενη σχέση με αντίστροφη συνεπαγωγή μέχρι να καταλήξουμε στην $n \geq n_0$. Δηλαδή:

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad \dots \quad \Leftarrow \quad \dots \quad \Leftarrow \quad \dots \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Εντελώς ανάλογη είναι η περίπτωση που το $-\infty$ είναι το όριο της ακολουθίας (x_n). Όλα όσα είπαμε ισχύουν κατάλληλα προσαρμοσμένα αντικαθιστώντας την σχέση $x_n > M$ με την $x_n < -M$. Βρείτε εσείς τις ανάλογες διατυπώσεις.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$n^2 \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Τότε

$$n^2 > M \quad \Leftarrow \quad n > \sqrt{M} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\sqrt{M}\right] + 1,$$

οπότε, παίρνοντας $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$, έχουμε ότι

$$n^2 > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Τότε

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad n^5 - Mn^3 + 4n - M > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα δεν λύνεται, οπότε εφαρμόζουμε μια τεχνική που γνωρίσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε την παράσταση $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ του n η οποία θέλουμε να είναι $> M$ και *ψάχνουμε να βρούμε μια άλλη παράσταση A του n η οποία να είναι μικρότερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ αλλά και απλούστερη από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$.* Την θέλουμε μικρότερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ διότι τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad A > M$$

και την θέλουμε απλούστερη από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ διότι τότε η ανισότητα $A > M$ θα μπορεί να λύθεί πιο εύκολα από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M$.
Να ένας τρόπος να βρούμε μια τέτοια παράσταση A:

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} \geq \frac{n^5}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2}.$$

Άρα, με την παράσταση $A = \frac{n^2}{2}$, έχουμε από την αρχή:

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad \frac{n^2}{2} > M \quad \Leftarrow \quad n > \sqrt{2M} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\sqrt{2M}\right] + 1.$$

Επομένως, με $n_0 = [\sqrt{2M}] + 1$ έχουμε ότι

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα μιλήσουμε για την έννοια της *περιοχής*, η οποία έχει κεντρικό ρόλο στη μελέτη της έννοιας του ορίου (ακολουθίας και συνάρτησης).

Αν $\epsilon > 0$, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του αριθμού x το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, το οποίο είναι συμμετρικό γύρω από τον x, και συμβολίζουμε

$$N_x(\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon).$$

Λέμε ότι η $N_x(\epsilon)$ έχει **κέντρο** x και **ακτίνα** ϵ.
Επίσης, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του $+\infty$ το διάστημα $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ και συμβολίζουμε

$$N_{+\infty}(\epsilon) = \Big(\frac{1}{\epsilon}, +\infty\Big].$$

Τέλος, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του $-\infty$ το διάστημα $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ και συμβολίζουμε

$$N_{-\infty}(\epsilon) = \Big[-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\Big).$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, όποιο κι αν είναι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (δηλαδή, είτε το x είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$ είτε είναι $-\infty$), κάθε περιοχή του το περιέχει. Οι παρακάτω ασκήσεις περιγράφουν μερικές βασικές ιδιότητες των περιοχών.

Άσκηση 2.2.2. [α] *Αποδείξτε ότι όταν ο $\epsilon > 0$ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.*

[β] *Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.*
Αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.
Αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Λύση: [α] Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε

$$x - \epsilon_2 < x - \epsilon_1 < x + \epsilon_1 < x + \epsilon_2,$$

δηλαδή

$$(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subseteq (x-\epsilon_2, x+\epsilon_2).$$

Έστω $x = +\infty$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε

$$0 < \frac{1}{\epsilon_2} < \frac{1}{\epsilon_1},$$

οπότε

$$\Big(\frac{1}{\epsilon_1}, +\infty\Big] \subseteq \Big(\frac{1}{\epsilon_2}, +\infty\Big].$$

Η περίπτωση με το $x = -\infty$ είναι παρόμοια.

[β] Έστω $l < x$ και $x \in \mathbb{R}$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ δεξιά του l, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $x-\epsilon$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, δηλαδή να είναι

$$l \leq x - \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$\epsilon \le x - l.$$

Άρα με $\epsilon = x - l$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι δεξιά του l.
Τώρα, έστω $x = +\infty$ (οπότε $l < x$). Και πάλι, για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ δεξιά του l, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $\frac{1}{\epsilon}$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, δηλαδή να είναι

$$l \le \frac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Αν $l \le 0$, τότε, όποιον ϵ κι αν πάρουμε (για παράδειγμα $\epsilon = 1$), η τελευταία ανισότητα ισχύει και, επομένως, η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l. (Αυτό είναι εξ αρχής προφανές.)
Αν $l > 0$, τότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\epsilon \le \frac{1}{l},$$

οπότε, αν πάρουμε $\epsilon = \frac{1}{l}$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l.
Η περίπτωση $x < u$ είναι παρόμοια με την περίπτωση $l < x$.
Τέλος, έστω $l < x < u$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ανάμεσα στους l, u, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $x - \epsilon$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l και το δεξιό άκρο $x + \epsilon$ αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u, δηλαδή να είναι

$$l \le x - \epsilon \qquad \text{και} \qquad x + \epsilon \le u$$

ή, ισοδύναμα,

$$\epsilon \le x - l \qquad \text{και} \qquad \epsilon \le u - x.$$

Άρα με

$$\epsilon = \min\{x - l, u - x\}$$

(ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ανάμεσα στους l, u.

Σχόλιο στο [β]*:* Όταν ο x είναι αριθμός και $l < x$, τότε ο $x - l$ είναι η απόσταση του x από τον l και, επομένως, έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον l, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη δεξιά του l.
Το ίδιο ισχύει και αν ο x είναι αριθμός και $x < u$. Ο $u - x$ είναι η απόσταση του x από τον u και έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον u, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη αριστερά του u.
Τέλος, αν $l < x < u$, ο $\min\{x - l, u - x\}$ είναι η απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u. Άρα έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη ανάμεσα στους l, u.

Άσκηση 2.2.4. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.*

Λύση: Έχουμε ήδη πει ότι το x ανήκει σε όλες τις περιοχές του. Πάμε για το αντίστροφο. Κατ' αρχάς, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν ο y ανήκει σε όλες τις περιοχές του x, τότε ισχύει

$$|y - x| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0.$$

Συνεπάγεται
$$|y-x| \leq 0$$
και, επειδή $|y-x| \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $|y-x| = 0$, δηλαδή $y = x$. Άρα ο μοναδικός y που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι ο $y = x$.
Τώρα έστω $x = +\infty$. Αν ο *αριθμός* y ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$, τότε ισχύει
$$y > \frac{1}{\epsilon} \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0$$
η, ισοδύναμα,
$$0 < \frac{1}{y} < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0.$$
Αυτό, όμως, είναι αδύνατο! Άρα το μοναδικό $y \in \overline{\mathbb{R}}$ που ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$ είναι το $y = +\infty$.

Άσκηση 2.2.3. *Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.*

Λύση: Θα δούμε μόνο την περίπτωση που οι x, y είναι και οι δύο αριθμοί. Ασχοληθείτε εσείς με τις άλλες περιπτώσεις.
Έστω, λοιπόν, $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ (η περίπτωση $y < x$ είναι προφανώς όμοια).
Για να είναι τα διαστήματα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ ξένα, αρκεί το δεξιό άκρο του πρώτου να είναι μικρότερο (με την ευρεία έννοια) από το αριστερό άκρο του δεύτερου: τότε το πρώτο διάστημα είναι αριστερά του δεύτερου. Δηλαδή, αρκεί να είναι
$$x + \epsilon \leq y - \epsilon$$
ή, ισοδύναμα,
$$\epsilon \leq \frac{y-x}{2}.$$
Άρα, αν πάρουμε $\epsilon = \frac{y-x}{2}$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), τότε οι περιοχές $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ είναι ξένες.

Σχόλιο: Αν $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, τότε τα άκρα $x + \epsilon$ και $y - \epsilon$ ταυτίζονται με το μέσο $\frac{x+y}{2}$ του διαστήματος ανάμεσα στους x, y. Αν ο $\epsilon > 0$ είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι αριστερά του $\frac{x+y}{2}$ και η $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ είναι δεξιά του $\frac{x+y}{2}$, οπότε οι δυο περιοχές είναι ξένες. Αν ο ϵ είναι μεγαλύτερος από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε οι περιοχές $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ περιέχουν και οι δύο τον $\frac{x+y}{2}$ και δεν είναι ξένες.

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων ασκήσεων μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε ελεύθερα από τώρα και στο εξής.

Τώρα θα διατυπώσουμε τους ορισμούς των ορίων στη "γλώσσα" των περιοχών.
Αν ο x είναι αριθμός, τότε ο ορισμός του $x_n \to x$ είναι: "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$" και γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$".
Στην περίπτωση $x = +\infty$, ο ορισμός του $x_n \to +\infty$ είναι: "για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$". Επομένως, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{M}$, τότε ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in (\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$".
Το ίδιο και στην περίπτωση $x = -\infty$. Ο ορισμός του $x_n \to -\infty$ είναι: "για κάθε $M > 0$

ισχύει τελικά $x_n < -M$". Άρα, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{M}$, τότε ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -\frac{1}{\epsilon}$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in [-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$".

Άρα σε κάθε περίπτωση, δηλαδή είτε το x είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$ είτε είναι $-\infty$, ο ορισμός του ορίου

$$x_n \to x$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στη "γλώσσα" των περιοχών οι τρεις ορισμοί ορίου διατυπώνονται ως *ένας ενιαίος ορισμός*. Προφανώς, αυτό είναι ένα πλεονέκτημα.

Και τώρα θα ασχοληθούμε με διάφορες ιδιότητες των ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο ακολουθίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα, τότε είτε καμιά δεν έχει όριο είτε και οι δύο έχουν όριο και το όριο αυτό είναι το ίδιο και για τις δυο ακολουθίες.*

Αυτή είναι η Πρόταση 2.1 στο βιβλίο. Διαβάστε μόνοι σας την απόδειξη. Ας δούμε μια απλή και χρήσιμη εφαρμογή. Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n)

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

και σχηματίζουμε την ακολουθία (x_{n+3}), δηλαδή την

$$x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots .$$

Είναι σαφές ότι η πρώτη ακολουθία από τον τέταρτο όρο της πέρα ταυτίζεται με την δεύτερη από τον πρώτο όρο της και πέρα. Άρα, αν η μια από τις ακολουθίες έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.

Το ίδιο ισχύει αν πάρουμε την (x_{n+1}) ή την (x_{n+7}) ή, γενικά, οποιανδήποτε (x_{n+k}) αντί της (x_{n+3}). Αυτό που είπαμε τώρα εφαρμόζεται πολύ συχνά.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμοί u, l.*

[α] *Αν $l < x$, τότε ισχύει τελικά $l < x_n$.*

[β] *Αν $x < u$, τότε ισχύει τελικά $x_n < u$.*

[γ] *Αν $l < x < u$, τότε ισχύει τελικά $l < x_n < u$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε μια από τις προηγούμενες ασκήσεις. Η ιδέα είναι να πάρουμε μια περιοχή $N_x(\epsilon)$ η οποία να βρίσκεται στην ίδια μεριά σε σχέση με τους l, u (κατά περίπτωση) στην οποία βρίσκεται και ο x. Αν ο x είναι αριστερά του u, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u. Αν ο x είναι δεξιά του l, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l. Αν ο x είναι ανάμεσα στους l, u, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Ας δούμε συγκεκριμένα τί γίνεται στην περίπτωση [γ].

Αν $l < x < u$, θεωρούμε μια αρκετά μικρή περιοχή $N_x(\epsilon)$ (δηλαδή έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$) η οποία να βρίσκεται ολόκληρη ανάμεσα στους l, u. (Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια τέτοια περιοχή του x.) Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$. Άρα ο x_n είναι τελικά ανάμεσα στους l, u.

Διατυπώστε ανάλογα τις περιπτώσεις [α], [β]. $\square$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία Πρόταση, δηλαδή η Πρόταση 2.2 του βιβλίου, μας λέει ότι *παίρνουμε πληροφορία για τους όρους μιας ακολουθίας αν έχουμε ανάλογη πληροφορία για το όριο της ακολουθίας.*

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω (για άτοπο) ότι $x_n \to x'$ και $x_n \to x''$ και $x' \neq x''$.
Γνωρίζουμε (από προηγούμενη σημερινή άσκηση) ότι υπάρχει αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε οι περιοχές $N_{x'}(\epsilon)$ και $N_{x''}(\epsilon)$ να είναι ξένες. Θεωρούμε έναν τέτοιον ϵ.
Επειδή $x_n \to x'$, ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$.
Επειδή $x_n \to x''$, ισχύει τελικά $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$.
Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$ *και* $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$. Δηλαδή, όλοι οι όροι x_n από κάποιον n_0 και πέρα ανήκουν ταυτόχρονα και στις δύο περιοχές $N_{x'}(\epsilon)$ και $N_{x''}(\epsilon)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι ο ϵ επιλέχθηκε ώστε οι δυο αυτές περιοχές να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. □

Η επόμενη Πρόταση είναι η Πρόταση 2.4 του βιβλίου. Διαβάστε την απόδειξή της.

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.*

[β] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε η (x_n) είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*

[γ] *Αν $x_n \to -\infty$, τότε η (x_n) είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Η επόμενη Πρόταση, δηλαδή η Πρόταση 2.5 του βιβλίου, μας λέει ότι *παίρνουμε πληροφορία για το όριο μιας ακολουθίας αν έχουμε ανάλογη πληροφορία για τους όρους της ακολουθίας.* Παρατηρήστε τη σχέση ανάμεσα σ' αυτήν την Πρόταση και σε μια προηγούμενη Πρόταση (η οποία μας δίνει "ανάποδη" πληροφορία και την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη αυτής της Πρότασης).

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Αν ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι $x < l$.
Τότε, σύμφωνα με μια προηγούμενη Πρόταση, ισχύει τελικά $x_n < l$. Επομένως, ισχύει $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους n και καταλήγουμε σε αντίφαση με το ότι ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n.
Άρα $x \geq l$.

Η απόδειξη του [β] είναι παρόμοια.

[γ] Έστω $u < l$ και έστω ότι ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n.
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι η (x_n) έχει όριο x.
Τότε, λόγω των [α] και [β], συνεπάγεται $x \leq u$ και $x \geq l$. Αλλά από τις $x \leq u$, $x \geq l$ και $u < l$ προκύπτει άτοπο. □

Ειδικά το μέρος [γ] της τελευταίας Πρότασης είναι πολύ χρήσιμο για να διακρίνουμε (και για να αποδείξουμε) ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει όριο. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$, δηλαδή η

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots ,$$

δεν έχει όριο διότι, προφανώς, έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$, δηλαδή την

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots .$$

Κι αυτή δεν έχει όριο διότι έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1.

ΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $y < x$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιος αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε η περιοχή $N_y(\epsilon)$ να είναι αριστερά της περιοχής $N_x(\epsilon)$. Θεωρούμε, λοιπόν, έναν τέτοιον ϵ.
Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επειδή $y_n \to y$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $y_n \in N_y(\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και $y_n \in N_y(\epsilon)$. Άρα, αφού η $N_y(\epsilon)$ είναι αριστερά της $N_x(\epsilon)$, ισχύει τελικά $y_n < x_n$. Άρα ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους n και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η υπόθεση της πρότασης είναι ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n. □

Η τελευταία Πρόταση (η 2.6 του βιβλίου) χρειάζεται λίγη προσοχή στην εφαρμογή της σε κάποια ειδική περίπτωση. Αν οι υποθέσεις της Πρότασης ισχύουν σε μια ισχυρότερη μορφή, δηλαδή αν ισχύουν οι $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει και η *γνήσια* ανισότητα $x_n < y_n$ για άπειρους n, τότε *δεν* παίρνουμε το ισχυρότερο συμπέρασμα $x < y$. Θα πάρουμε το ίδιο συμπέρασμα $x \leq y$. Αυτό φαίνεται στο εξής παράδειγμα. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για άπειρους n (και μάλιστα, για κάθε n) και οι δυο ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο 0: μπορούμε να γράψουμε $0 \leq 0$ αλλά όχι $0 < 0$.

Μέχρι τώρα είδαμε μια κατηγορία προτάσεων όπου γνωρίζουμε πληροφορία για το όριο ακολουθίας (ή ακολουθιών) και βγάζουμε συμπέρασμα για τους όρους της ακολουθίας και μια άλλη κατηγορία προτάσεων όπου έχουμε πληροφορία για τους όρους μιας ακολουθίας και βγάζουμε συμπέρασμα για το όριό της. Σε όλα αυτά γνωρίζουμε ότι η ακολουθία *έχει* όριο. Τώρα θα δούμε μια τρίτη κατηγορία προτάσεων όπου δεν γνωρίζουμε αν μια ακολουθία έχει όριο και, με διάφορες υποθέσεις, βγάζουμε συμπέρασμα ότι η ακολουθία έχει όριο και το υπολογίζουμε.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*

[α] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.*

[β] *Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.*

Αυτή είναι η Πρόταση 2.7 του βιβλίου και μπορείτε να διαβάσετε την απόδειξη εκεί. Θα πω μόνο ότι η Πρόταση αυτή φαίνεται απολύτως "λογική". Αν οι x_n απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά (αυτό σημαίνει το $x_n \to +\infty$) και αν οι y_n είναι πιο δεξιά (με την ευρεία έννοια) από τους αντίστοιχους x_n, τότε είναι προφανές ότι και οι y_n απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά.

Η επόμενη είναι η Πρόταση 2.8 του βιβλίου.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $a = +\infty$ είναι απλή: από το ότι $x_n \to +\infty$ και από την ανισότητα $x_n \leq y_n$ (και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $y_n \leq z_n$) και από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται $y_n \to +\infty$. Το ίδιο και στην περίπτωση $a = -\infty$.
Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$. (Πρέπει να έχει γίνει φανερό τώρα πια ότι αρχίζουμε με την έκφραση

"έστω $\epsilon > 0$" όταν θέλουμε να αποδείξουμε κάτι για κάθε $\epsilon > 0$.)
Επειδή $x_n \to a$, ισχύει τελικά $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και, επειδή $z_n \to a$, ισχύει τελικά $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.
Άρα ισχύει τελικά $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και $z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ και $x_n \leq y_n \leq z_n$.
Τώρα σκεφτόμαστε ότι το σύνολο $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ είναι *διάστημα* και ότι ως διάστημα έχει μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα: αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε στοιχεία ενός διαστήματος, τότε ό,τι είναι ανάμεσα σ' αυτά τα δυο στοιχεία είναι κι αυτό στοιχείο του ίδιου διαστήματος. (Προσέξτε: αυτό δεν ισχύει αν το σύνολο δεν είναι διάστημα.)
Άρα ισχύει τελικά $y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα $y_n \to a$. $\square$

Η ιδιότητα παρεμβολής φαίνεται κι αυτή "λογική". Αν ο y_n είναι ανάμεσα στους x_n, z_n και αυτοί πλησιάζουν τον αριθμό a, τότε και ο y_n "αναγκάζεται" να πλησιάζει τον ίδιο a.

Στο ίδιο πλαίσιο (αυτό της εύρεσης του ορίου μιας ακολουθίας) βρίσκονται και οι λεγόμενοι **αλγεβρικοί κανόνες** ορίων. Εδώ θα αποδείξω μόνο τον **κανόνα αθροίσματος** για να δούμε την ιδέα αυτής της απόδειξης. Παρόμοιες είναι και οι αποδείξεις των άλλων κανόνων: σε κάθε περίπτωση η βασική ιδέα είναι ίδια και μόνο οι τεχνικές λεπτομέρειες αλλάζουν. Τους αλγεβρικούς κανόνες και τις αποδείξεις τους θα διαβάσετε στην Πρόταση 2.9 του βιβλίου.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν το $x + y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή $(+\infty) + (-\infty)$ ή $(-\infty) + (+\infty)$), τότε*

$$x_n + y_n \to x + y.$$

Απόδειξη. Και πάλι θα περιοριστούμε στην περίπτωση που και τα δυο όρια x, y είναι αριθμοί.
Θέλουμε, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon.$$

Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών για να δούμε πώς θα πετύχουμε τον σκοπό μας.
Σκεφτόμαστε ότι δεν γνωρίζουμε (ακόμη) κάτι για την παράσταση $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ αλλά *γνωρίζουμε* κάτι για τις παραστάσεις $|x_n - x|$ και $|y_n - y|$, αφού γνωρίζουμε ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να συσχετίσουμε την παράσταση $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ με τις $|x_n-x|$ και $|y_n-y|$ ώστε να βγάλουμε συμπέρασμα για την πρώτη από πληροφορία που έχουμε για τις άλλες δύο. Αυτό είναι αλγεβρικά απλό:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Και τώρα σκεφτόμαστε ότι, αν έχουμε μια ποσότητα την οποία θέλουμε να κάνουμε $< \epsilon$ και γνωρίζουμε μια μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) ποσότητα, τότε αρκεί να κάνουμε αυτήν την δεύτερη ποσότητα $< \epsilon$. Θα προσπαθήσουμε, επομένως, να δούμε αν ισχύει τελικά $|x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon$. Και τώρα σκεφτόμαστε (πολλή σκέψη!!) ότι αν θέλουμε να κάνουμε το άθροισμα δυο αριθμών $< \epsilon$ αρκεί να κάνουμε καθέναν από αυτούς $< \frac{\epsilon}{2}$. Και πάλι σκέψη: μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει τελικά $|x_n-x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$; Μα αυτή ακριβώς είναι η πληροφορία που λέγαμε στην προηγούμενη

παράγραφο ότι έχουμε για τις $|x_n - x|$ και $|y_n - y|$ και που μας έκανε να θέλουμε να συσχετίσουμε την $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ με τις $|x_n-x|$ και $|y_n-y|$. Η πληροφορία αυτή βγαίνει από το ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και καταστρώνουμε με "αντίστροφους συλλογισμούς" την απόδειξή μας.
Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon.$$

Επειδή $x_n \to x$, ισχύει τελικά $|x_n-x| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επειδή $y_n \to y$, ισχύει τελικά $|y_n-y| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα (προσθέτοντας κατά μέλη) ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon$ και, επομένως, $x_n + y_n \to x + y$. $\square$

Διαβάστε προσεκτικά τα παραδείγματα της ενότητας 2.3 του βιβλίου. Τα όρια πολυωνυμικών και ρητών παραστάσεων του n είναι ήδη γνωστά και αποδεικνύονται βάσει των διαφόρων ιδιοτήτων που μάθαμε. Δυο επίσης χρήσιμα όρια είναι τα

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \qquad \sqrt[n]{n} \to 1.$$

(Το a είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός.) Δείτε τις αποδείξεις τους στο βιβλίο.

Θα πω μόνο δυο λόγια για το πολύ σημαντικό παράδειγμα της **γεωμετρικής προόδου**, δηλαδή της ακολουθίας (a^n) όπου ο a είναι ένας σταθερός αριθμός. Η πιο βασική περίπτωση είναι όταν $a > 1$ και θα επικεντρωθώ σ' αυτήν. Τα υπόλοιπα διαβάστε τα στο βιβλίο. Έστω λοιπόν $a > 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την λεγόμενη

Ανισότητα του Bernoulli : $\qquad (x + 1)^n \geq nx + 1 \qquad$ για $x \geq -1$ και $n \in \mathbb{N}$.

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή ως προς τον n (το x θεωρείται σταθερό). Κάντε το. Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Bernoulli με $x = a - 1$ το οποίο είναι > 0 διότι $a > 1$ και έχουμε ότι ισχύει

$$a^n \geq n(a - 1) + 1$$

για κάθε n. Επειδή $a - 1 > 0$, έχουμε $n(a - 1) + 1 \to +\infty$ και, επομένως, $a^n \to +\infty$. Το πλήρες αποτέλεσμα είναι

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Και το τελευταίο που θα δούμε σήμερα είναι μια τεχνική που εφαρμόζεται σε κάποιες "δύσκολες" περιπτώσεις που δεν εφαρμόζονται οι συνηθισμένες ιδιότητες.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ. *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*

[α] *Αν $0 < b < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$, τότε $x_n \to 0$.*

[β] *Αν $b > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$, τότε $x_n \to +\infty$.*

[γ] *Αν $0 \leq a < 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to 0$.*

[δ] *Αν $a > 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το [β] και το σχετικό με αυτό [δ]. Τα [α] και [γ] δείτε τα στο βιβλίο.

[β] Εύκολα παρατηρούμε ότι, επειδή $b > 1$ και $x_n > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_{n+1} \geq bx_n > x_n$, οπότε η (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η (x_n) έχει όριο $+\infty$. Υπάρχουν γνησίως αύξουσες ακολουθίες που δεν έχουν όριο $+\infty$. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(2-\frac{1}{n})$ είναι γνησίως αύξουσα (και έχει όλους τους όρους της > 0) και έχει όριο 2. Αυτό που θα καθορίσει ότι η (x_n) έχει όριο $+\infty$ είναι ότι, όπως θα δούμε, η (x_n) αυξάνεται με τουλάχιστον τον "ίδιο ρυθμό" που αυξάνεται μια συγκεκριμένη γεωμετρική πρόοδος με λόγο > 1. Πράγματι:

η υπόθεση είναι ότι ο λόγος δυο διαδοχικών όρων της (x_n) είναι τουλάχιστον b και σκεφτείτε ότι ο λόγος δυο διαδοχικών όρων της γεωμετρικής προόδου (b^n) είναι b.

Οπότε σκεφτόμαστε ως εξής.
Υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$x_{n+1} \geq bx_n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα ισχύουν διαδοχικά τα εξής (σε κάθε επόμενη γραμμή θα χρησιμοποιούμε την ανισότητα της προηγούμενης γραμμής πολλαπλασιασμένη με b):

$$x_{n_0+1} \geq bx_{n_0}$$

$$x_{n_0+2} \geq bx_{n_0+1} \geq b^2 x_{n_0}$$

$$x_{n_0+3} \geq bx_{n_0+2} \geq b^3 x_{n_0}$$

κλπ.
Άρα με επαγωγή βλέπουμε ότι ισχύει

$$x_{n_0+k} \geq b^k x_{n_0}$$

για κάθε $k \geq 0$ και, γράφοντας $n_0 + k = n$, έχουμε ότι ισχύει

$$x_n \geq b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Δηλαδή ισχύει τελικά

$$x_n \geq \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n.$$

Έχουμε δηλαδή "σύγκριση" της (x_n) με την γεωμετρική πρόοδο (b^n).
Τώρα ο αριθμός $\frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$ είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από τον n) και $b^n \to +\infty$ διότι $b > 1$. Άρα

$$\frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n \to +\infty,$$

οπότε

$$x_n \to +\infty.$$

[δ] Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό b ώστε $1 < b < a$. (Για παράδειγμα τον $b = \frac{1+a}{2}$.)
Επειδή $a > b$ και επειδή $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$. Επειδή $b > 1$, από το [β] συνεπάγεται $x_n \to +\infty$. □

Δυο σχετικά παραδείγματα εφαρμογής του κριτηρίου λόγου είναι τα εξής.

Παράδειγμα. Αν $a > 1$ και ο k είναι ένας σταθερός (δηλαδή ανεξάρτητος του n) φυσικός αριθμός, τότε

$$\frac{a^n}{n^k} \to +\infty.$$

Ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και, επίσης, δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε τον τύπο $x_n = \frac{a^n}{n^k}$ της ακολουθίας. Όμως, βλέπουμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{a^n}{n^k}} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k \to a\,1^k = a$$

και ότι $a > 1$.
Άρα $x_n \to +\infty$.

Παράδειγμα. Αν $a > 1$, τότε

$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Πάλι ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και, επίσης, δεν απλοποιείται ο τύπος $x_n = \frac{a^n}{n!}$ της ακολουθίας. Όμως,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

και $0 < 1$.
Άρα $x_n \to 0$.

Σχόλιο 1: Προσέξτε όταν εφαρμόζετε το κριτήριο λόγου σε κάποια ακολουθία (x_n) να βλέπετε πρώτα ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n. Το κριτήριο λόγου διατυπώνεται και χωρίς αυτήν την υπόθεση, αλλά είναι λίγο πιο περίπλοκο.

Σχόλιο 2: Ειδικές περιπτώσεις των δυο τελευταίων παραδειγμάτων είναι τα όρια

$$\frac{2^n}{n^{10}} \to +\infty \qquad \text{και} \qquad \frac{10^n}{n!} \to 0.$$

Παρατηρήστε πώς "ξεγελούν" οι αρχικοί όροι των δυο ακολουθιών. Αν δείτε τους αρχικούς όρους

$$\frac{2^1}{1^{10}} = 2, \qquad \frac{2^2}{2^{10}} = 0.0039\ldots, \qquad \frac{2^3}{3^{10}} = 0.00013\ldots \qquad \text{κλπ}$$

της πρώτης ακολουθίας θα φανταστείτε ότι είναι φθίνουσα και αν δείτε τους αρχικούς όρους

$$\frac{10^1}{1!} = 10, \qquad \frac{10^2}{2!} = 50, \qquad \frac{10^3}{3!} = 166.6\ldots \qquad \text{κλπ}$$

της δεύτερης ακολουθίας θα φανταστείτε ότι είναι αύξουσα. Μάλιστα, πιθανόν να σκεφτείτε ότι η πρώτη έχει όριο 0 και η δεύτερη $+\infty$.

ΕΝΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Θ αρχίσουμε με δύο σχόλια σχετικά με τις απροσδιόριστες μορφές.

Σχόλιο 1: Στις περιπτώσεις που προκύπτει απροσδιόριστη μορφή *δεν* συνεπάγεται αυτομάτως ότι δεν υπάρχει το όριο που θέλουμε να υπολογίσουμε. Το μόνο που μπορούμε να πούμε σε τέτοια περίπτωση είναι ότι το όριο μπορεί να μην υπάρχει αλλά μπορεί και να υπάρχει και τότε πρέπει να το βρούμε με άλλον τρόπο και όχι με αυτόν που μας οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n)$$

εφαρμόζοντας τον κανόνα διαφοράς, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

$$(+\infty)-(+\infty)$$

διότι $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Άρα το όριο, *αν υπάρχει*, δεν υπολογίζεται με τον κανόνα διαφοράς.
Μπορούμε, όμως, να γράψουμε

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n) = \lim_{n\to+\infty} n(n-1)$$

και να εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου. Πράγματι, έχουμε $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n) = \lim_{n\to+\infty} n \lim_{n\to+\infty}(n-1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Σχόλιο 2: Ας πούμε δυο λόγια για την απροσδιόριστη μορφή

$$\frac{1}{0}.$$

Κατ' αρχάς ας σκεφτούμε *γιατί* η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Αυτό συμβαίνει διότι, αν έχουμε μια μεταβλητή ποσότητα, για παράδειγμα τον n-οστό όρο μιας ακολουθίας, η οποία πλησιάζει τον 0, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε με γενικό και ενιαίο τρόπο τί θα κάνει η αντίστροφη ποσότητα.
Δείτε για παράδειγμα την ακολουθία

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$x_n \to 0$$

αλλά η αντίστροφη ακολουθία είναι η

$$\frac{1}{x_n} = \frac{n}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1}n$$

και αυτή δεν έχει όριο, διότι έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1.
Γενικότερα, όταν μια μεταβλητή ποσότητα πλησιάζει τον 0 και παίρνει τιμές μικρές

σε μέγεθος αλλά με εναλλασόμενα πρόσημα, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα παίρνει τιμές μεγάλες σε μέγεθος αλλά με εναλλασόμενα πρόσημα με αποτέλεσμα *κάποιες* τιμές αυτής της αντίστροφης ποσότητας να απομακρύνονται προς το $+\infty$ και *κάποιες* άλλες τιμές της να απομακρύνονται προς το $-\infty$, οπότε η αντίστροφη ποσότητα ούτε πλησιάζει κάποιον αριθμό ούτε απομακρύνεται προς το $+\infty$ ούτε απομακρύνεται προς το $-\infty$.
Τώρα, αν μια ακολουθία δεν έχει όρους με εναλλασόμενα πρόσημα και έχει όριο 0, μπορούμε να έχουμε γενικό συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $x_n \to 0$.*

Αν ισχύει τελικά $x_n > 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.

Αν ισχύει τελικά $x_n < 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$.

Αυτό είναι το μέρος [δ] της Πρότασης 2.11 του βιβλίου. Δείτε εκεί την απόδειξη. Πάντως, μπορούμε να καταλάβουμε ότι, αν μια μεταβλητή ποσότητα έχει μικρές θετικές τιμές, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα έχει μεγάλες θετικές τιμές και ότι, αν μια μεταβλητή ποσότητα έχει μικρές αρνητικές τιμές, τότε η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα έχει μεγάλες αρνητικές τιμές.
Έχουμε και τον ανάλογο μνημονικό κανόνα:

$$\frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Και τώρα ερχόμαστε σε ένα πολύ σημαντικό Θεώρημα, το Θεώρημα 2.1 του βιβλίου. Με βάση αυτό το Θεώρημα μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να αποφασίζουμε αν μια ακολουθία έχει όριο χωρίς να την συγκρίνουμε με κάποια άλλη ακολουθία (την οποία πρέπει να φαντασθούμε) και χωρίς να χρειαστεί να την "σπάσουμε" σε απλούστερες ακολουθίες (οπότε πρέπει να φαντασθούμε και τις απλούστερες ακολουθίες αλλά και τον τρόπο του "σπασίματος"). Το Θεώρημα μας λέει ότι το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ελέγξουμε αν η ακολουθία είναι μονότονη ή όχι: αν είναι μονότονη τότε έχει οπωσδήποτε όριο. Το να ελέγξουμε αν μια ακολουθία (x_n) είναι μονότονη ή όχι είναι σε πάρα πολλές περιπτώσεις εύκολο: έχουμε μόνο να εξετάσουμε την ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ και να δούμε αν αυτή (ή η αντίθετή της) ισχύει για κάθε n.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο.*

[α] *Αν η (x_n) είναι αύξουσα, τότε έχει όριο το οποίο είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Ειδικώτερα, αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει όριο $+\infty$ και, αν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει όριο αριθμό. Και στις δυο περιπτώσεις το όριο της (x_n) ισούται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

[β] *Αν η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε έχει όριο το οποίο είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$. Ειδικώτερα, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει όριο $-\infty$ και, αν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει όριο αριθμό. Και στις δυο περιπτώσεις το όριο της (x_n) ισούται με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Απόδειξη. [α] Υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι αύξουσα.
Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.
Τώρα πρέπει να κατανοήσουμε κάτι βασικό σχετικά με τη φύση αυτού του Θεωρήματος. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η (x_n) έχει όριο αλλά δεν έχουμε καμιά ιδέα για το ποιό περιμένουμε να είναι το όριό της. Αν μπορούσαμε να φαντασθούμε κάποιο υποψήφιο όριο x, τότε για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θα ακολουθούσαμε την γνωστή διαδικασία του ορισμού του ορίου: θα θεωρούσαμε $\epsilon > 0$ και θα ασχολιόμασταν με το να αποδείξουμε ότι η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ ισχύει από κάποιον n και πέρα (εύρεση του n_0). Ή, αν το x δεν ήταν αριθμός αλλά ήταν $+\infty$, θα θεωρούσαμε $M > 0$ και θα μελετούσαμε με παρόμοιο τρόπο (εύρεση του n_0) την ανισότητα $x_n > M$. Άρα πρέπει πρώτα να υποψιασθούμε το υποψήφιο όριο της (x_n).
Για να το κάνουμε αυτό ζωγραφίζουμε πρόχειρα τους όρους της (x_n) προσπαθώντας να καταλάβουμε πώς αυτοί "κινούνται" πάνω στην ευθεία. Και αυθόρμητα ξεχωρίζουμε δυο βασικές περιπτώσεις: *η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη και η (x_n) είναι άνω φραγμένη.*
Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών.
(i) Έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Σ' αυτήν την περίπτωση το σχήμα είναι περίπου:

(Φανταστείτε την ακολουθία (n) ή την (2^n).)
Είναι νομίζω εύλογο να αναγνωρίσουμε ως υποψήφιο όριο της (x_n) το $+\infty$. Σκεφτόμαστε μάλιστα ότι, επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το σύνολο των όρων της

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

δεν είναι ούτε αυτό άνω φραγμένο, οπότε το supremum του είναι εξ ορισμού $+\infty$.
Αν, λοιπόν, αποδείξουμε ότι

$$x_n \to +\infty,$$

τότε αφ' ενός θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) έχει όριο $+\infty$ αφ' ετέρου θα έχουμε αποδείξει και ότι το όριο της (x_n) ταυτίζεται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη στην πρώτη περίπτωση.
Επομένως, έστω $M > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n > M$ από κάποιον n_0 και πέρα.
Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.
Σκεφτόμαστε τώρα κάτι σημαντικό: *είναι αρκετό να βρούμε έστω και έναν n_0 με την ιδιότητα $x_{n_0} > M$.* Διότι, αν ισχύει $x_{n_0} > M$, τότε, ΕΠΕΙΔΗ Η (x_n) ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ, θα ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή θα ισχύει τελικά $x_n > M$ και θα τελειώσει η απόδειξη. Και γιατί αναμένουμε ότι θα ισχύει $x_{n_0} > M$ έστω για έναν n_0; Μα διότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε κάποιος όρος της πρέπει να είναι $> M$ (αλλιώς ο M θα ήταν άνω φράγμα της (x_n)).
Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και πάμε στην απόδειξη.
Έστω $M > 0$. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει κάποιος όρος της ο οποίος είναι $> M$. Δηλαδή υπάρχει n_0 ώστε

$$x_{n_0} > M.$$

Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$. Άρα $x_n \to +\infty$.
(ii) Έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη.
Τώρα το σχήμα είναι περίπου:

Ο u είναι κάποιο άνω φράγμα της (x_n) και όλοι οι όροι της (x_n) είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u.
Πάλι είναι εύλογο ότι οι όροι της (x_n) καθώς κινούνται προς τα δεξιά χωρίς να ξεπερνούν τον u "συσσωρεύονται" σε κάποιο σημείο x το οποίο πρέπει να είναι κι αυτό αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u.
(Φαντασθείτε την ακολουθία $(1 - \frac{1}{n})$ η οποία είναι αύξουσα με άνω φράγμα τον 3, για παράδειγμα, και οι όροι της "συσσωρεύονται" στο σημείο 1.)
Ας δούμε, όμως, και πάλι το σύνολο

$$X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

των όρων της ακολουθίας. Μήπως μπορούμε να διακρίνουμε το supremum του X; Νομίζω ότι η απάντηση πρέπει να είναι προφανής: τα σημεία x_n "συσσωρεύονται" στο σημείο x και επομένως αυτό το ίδιο το x πρέπει να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα όλων των x_n, δηλαδή το supremum του συνόλου X.
Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.
Όλα αυτά είναι "λογικά" κατά κάποια "διαισθητική" έννοια, αλλά πρέπει να καταστρώσουμε μια αυστηρή απόδειξη. Πρέπει να πούμε με μαθηματικά αυστηρό τρόπο ποιό είναι το υποψήφιο όριο x, πώς δηλαδή προκύπτει η ύπαρξη αυτού του x, και μετά να αποδείξουμε ότι πράγματι $x_n \to x$. Φυσικά, η απόδειξη δεν πρέπει να εξαρτάται από ζωγραφιές, όσο πειστικές κι αν είναι αυτές και όσο κι αν μας βοηθούν να βρούμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο x.
Μέχρι τώρα έχουμε καταφέρει τα εξής με τη βοήθεια του σχήματος: να "πεισθούμε" ότι η (x_n) πρέπει να έχει κάποιο όριο x και ότι αυτό το όριο φαίνεται να ταυτίζεται με το supremum του συνόλου X των όρων της (x_n).
Και τώρα φτάσαμε στο *κομβικό σημείο* της απόδειξης. Μάλιστα, τώρα θα ξεκαθαρίσουμε και *για ποιόν λόγο ανακατέψαμε στη συζήτηση το σύνολο X.*
Ξαναλέμε: είναι διασθητικά προφανές ότι το x είναι το όριο της (x_n) και είναι διαισθητικά προφανές ότι το ίδιο x είναι το supremum του X.

Ερώτημα: ποιό από τα δυο, η ακολουθία (x_n) ή το σύνολο X "νομιμοποιούν" το x; (Ποιός από τους δυο "γονείς" έχει δικαίωμα εκ του νόμου να δηλώσει το "τέκνο" ώστε αυτό να "υπάρχει";)

Απάντηση: το σύνολο X ! Δεν γνωρίζουμε αν μια αύξουσα ακολουθία έχει όριο, αλλά γνωρίζουμε ότι ένα μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. (Η "ύπαρξη" του supremum ("τέκνου") ενός μη-κενού, άνω φραγμένου συνόλου ("γονέας") νομιμοποιείται από την Ιδιότητα Supremum.)

Άρα, να ο λόγος που μπήκε στην συζήτηση το σύνολο X των όρων της (x_n). Διότι το supremum αυτού του συνόλου, η ύπαρξη του οποίου (supremum) εξασφαλίζεται από την Ιδιότητα Supremum, θα είναι το υποψήφιο όριο της (x_n).
Επομένως, η απόδειξη θα ακολουθήσει την εξής πορεία: θα θεωρήσουμε το supremum του συνόλου X, θα το ονομάσουμε x και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$. Τότε αφ' ενός θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) έχει κάποιο όριο x αφ' ετέρου θα έχουμε αποδείξει και ότι το όριο της (x_n) ταυτίζεται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη και στην δεύτερη περίπτωση.
Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών.
Ονομάζουμε, λοιπόν,

$$x = \sup X,$$

το οποίο είναι αριθμός, διότι το X είναι άνω φραγμένο αφού η (x_n) είναι άνω φραγμένη.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$x_n \to x.$$

Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ από κάποιον n_0 και πέρα.
Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών.
Σκεφτόμαστε: *είναι αρκετό να βρούμε έστω και έναν n_0 με την ιδιότητα $|x_{n_0} - x| < \epsilon$.* Πράγματι, αυτό σημαίνει ότι ο x_{n_0} βρίσκεται στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ και, επειδή ο x είναι άνω φράγμα του συνόλου των όρων της (x_n), ο x_{n_0} βρίσκεται στο "μισό" διάστημα $(x - \epsilon, x]$. Τώρα, ΕΠΕΙΔΗ Η (x_n) ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ, κάθε x_n από τον x_{n_0} και πέρα θα βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του x_{n_0} και, φυσικά, δεν θα ξεπερνά τον x, οπότε θα βρίσκεται κι αυτός στο "μισό" διάστημα $(x - \epsilon, x]$ και άρα και στο "ολόκληρο" διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Δηλαδή θα ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ και θα τελειώσει η απόδειξη. Και γιατί αναμένουμε ότι θα ισχύει $|x_{n_0} - x| < \epsilon$ έστω για έναν n_0; Μα διότι ο x είναι το supremum του συνόλου X, οπότε κάποιο στοιχείο του X, δηλαδή όρος της (x_n), πρέπει να βρίσκεται όσο θέλουμε κοντά στον x.
Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και πάμε στην απόδειξη.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή ο x είναι το supremum του συνόλου X, υπάρχει κάποιο στοιχείο x_{n_0} του X ώστε

$$x - \epsilon < x_{n_0} \le x.$$

Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα και επειδή ο x είναι άνω φράγμα του X, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \le x_n \le x$$

για κάθε $n \ge n_0$.
Άρα ισχύει

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$|x_n - x| < \epsilon$$

για κάθε $n \ge n_0$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα $x_n \to x$.

[β] Ομοίως!! □

(Η απόδειξη έπιασε περίπου τρεις σελίδες ενώ στο βιβλίο πιάνει μισή σελίδα! Ο λόγος είναι ότι εδώ η απόδειξη είναι γεμάτη με επεξηγηματικές παρενθέσεις. Το ίδιο έγινε και στον πίνακα.)

Υπάρχουν κάποια υποπροϊόντα του Θεωρήματος. Για παράδειγμα, αν η (x_n) είναι αύξουσα και αν $x_n \to x$, τότε, επειδή ο x είναι το supremum του συνόλου των όρων της (x_n), συνεπάγεται ότι ισχύει

$$x_n \leq x$$

για κάθε n.
Υπάρχει και το ανάλογο συμπέρασμα για φθίνουσες ακολουθίες.

Παράδειγμα. Έστω $0 \leq a < 1$. Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n.$$

Η ακολουθία αυτή είναι παράδειγμα στην ενότητα 2.3 του βιβλίου και γνωρίζουμε ότι έχει όριο $\frac{1}{1-a}$. Ας δούμε, όμως, αν μπορούμε να πούμε κάτι γι αυτήν μέσα στα πλαίσια του θέματος των μονότονων ακολουθιών.
Είναι σαφές ότι, επειδή $a \geq 0$, ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + a + \cdots + a^n + a^{n+1} \geq 1 + a + \cdots + a^n = x_n$$

για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα.
Άρα η (x_n) έχει όριο αριθμό ή $+\infty$ και για να δούμε τί από τα δυο ισχύει πρέπει να ελέγξουμε αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη ή όχι. Όμως, ισχύει

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} < \frac{1}{1 - a}$$

για κάθε n. Άρα ο αριθμός $\frac{1}{1-a}$ είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) έχει όριο αριθμό.

Πάμε στο παράδειγμα 2.4.2 του βιβλίου.

Παράδειγμα. Τώρα θεωρούμε την "περίεργη" ακολουθία με τύπο

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Η (x_n) είναι αύξουσα. Πράγματι, ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = x_n$$

για κάθε n.
Τώρα θα δούμε ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε έχει όριο αριθμό.
Δυστυχώς, δεν υπάρχει πιο "σύντομη" έκφραση του αθροίσματος $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, οπότε πρέπει να σκεφτούμε κάτι έξυπνο για να βρούμε (αν υπάρχει) ένα άνω φράγμα του x_n που να μην εξαρτάται από τον n. Ιδού:

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.
\end{aligned}$$

Άρα ο 3 είναι άνω φράγμα της (x_n) και επομένως η (x_n) έχει όριο αριθμό, έστω

$$x_n = x.$$

Το όριο αυτό της (x_n) είναι προφανώς ≤ 3. Επίσης, το όριο είναι ≥ 2 αφού η (x_n) είναι αύξουσα και έχει πρώτο όρο $x_1 = 2$. Δηλαδή

$$2 \leq x \leq 3.$$

Πάμε τώρα σε ένα πάρα πολύ σημαντικό παράδειγμα. Είναι το παράδειγμα 2.4.3 του βιβλίου.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Αποδεικνύεται ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Δεν θα το αποδείξουμε στον πίνακα διότι η απόδειξη είναι τεχνικά περίπλοκη. Διαβάστε την στο βιβλίο. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η ακολουθία αυτή και η ακολουθία του προηγούμενου παραδείγματος έχουν το ίδιο όριο!! Δηλαδή,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Το κοινό αυτό όριο συμβολίζεται με το γράμμα e. Δηλαδή,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Προσέξτε: Αυτός είναι ο *ορισμός* του αριθμού e.

ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 2.2.7. *Έστω* $\epsilon_0 > 0$. *Αποδείξτε ότι* $x_n \to x$ *αν και μόνο αν για κάθε* ϵ *με* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ *ισχύει τελικά* $x_n \in N_x(\epsilon)$.

Λύση: Έχουμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία ανάμεσα στις εξής δυο προτάσεις:

$$A : \qquad x_n \to x$$

και

$$B : \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Σκεφτόμαστε ότι η διατύπωση του ορισμού του $x_n \to x$ μοιάζει πολύ με την διατύπωση της πρότασης B, οπότε αντικαθιστούμε την πρόταση A με τον αντίστοιχο ορισμό ώστε να συγκρίνουμε πιο εύκολα τις δυο προτάσεις. Έτσι έχουμε:

$$A : \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

και

$$B : \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Τώρα είναι προφανές ότι η πρόταση A συνεπάγεται την πρόταση B. Πράγματι, η πρόταση A λέει ότι *όλοι* οι $\epsilon > 0$ έχουν μια ιδιότητα (το να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$) ενώ η πρόταση B λέει ότι *κάποιοι* $\epsilon > 0$, εκείνοι που είναι $\leq \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Άρα μένει να δούμε αν η πρόταση B συνεπάγεται την πρόταση A.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ισχύει η πρόταση B. Δηλαδή ότι οι $\epsilon > 0$ που είναι και $\leq \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση A πρέπει να αποδείξουμε ότι και οι υπόλοιποι $\epsilon > 0$, δηλαδή εκείνοι που είναι $> \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Έστω, λοιπόν, $\epsilon > \epsilon_0$. Επειδή υποθέσαμε ότι ισχύει η πρόταση B, συνεπάγεται ότι ο ϵ_0 έχει την ιδιότητα που συζητάμε, δηλαδή ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$. Όμως, επειδή $\epsilon > \epsilon_0$, είναι $N_x(\epsilon_0) \subseteq N_x(\epsilon)$ (όταν μικραίνει η ακτίνα, μικραίνει και η αντίστοιχη περιοχή). Και, επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Άρα και οι $\epsilon > 0$ που είναι $> \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως, ισχύει η πρόταση A.

Άσκηση 2.3.25. *Βρείτε το λάθος στον συλλογισμό:*

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \ (n \text{ φορές}) \ \to 0 + \cdots + 0 \ (n \text{ φορές}) \ = 0.$$

Λύση: Το συμπέρασμα είναι λάθος: $1 \to 0$. Άρα υπάρχει οπωσδήποτε λάθος στην "απόδειξη".
Το λάθος είναι στην εφαρμογή του κανόνα αθροίσματος. Ο κανόνας αθροίσματος εφαρμόζεται σε δυο ακολουθίες ή σε τρεις ακολουθίες ή, γενικότερα, σε k ακολουθίες. Όμως, το πλήθος k των ακολουθιών πρέπει να είναι σταθερό (ένα, δύο, … εκατό), δηλαδή να μην εξαρτάται από τον δείκτη n των ακολουθιών. Στον παραπάνω συλλογισμό το πλήθος n είναι το ίδιο με τον δείκτη n.

Άσκηση 2.3.27. *Βρείτε ακολουθίες* (x_n), (y_n) *που δεν έχουν όριο ώστε η* $(x_n + y_n)$ *να έχει όριο.*

Λύση: Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) θεωρούμε την αντίθετη της (x_n). Έτσι όταν προσθέσουμε τις δυο ακολουθίες αυτές θα αλληλοαναιρεθούν και το αποτέλεσμα θα συγκλίνει!
Άρα παίρνουμε

$$x_n = (-1)^{n-1} \qquad \text{και} \qquad y_n = -x_n = -(-1)^{n-1}$$

οπότε

$$x_n + y_n = 0.$$

Τώρα, η (x_n) και η (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά $x_n + y_n \to 0$.

Άσκηση 2.3.29. *Βρείτε ακολουθίες $(x_n), y_n)$ ώστε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και η (x_n+y_n) (i) να έχει όριο οποιοδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.*

Λύση: (i) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n + c \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = c \to c$.
Έστω $c = +\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = 2n \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = 2n - n = n \to +\infty$.
Έστω $c = -\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n \qquad \text{και} \qquad y_n = -2n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = n - 2n = -n \to -\infty$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n + (-1)^n \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = n + (-1)^n - n = (-1)^n$, οπότε η $(x_n + y_n)$ δεν έχει όριο.
Το ότι $x_n \to +\infty$ ισχύει διότι ισχύει $x_n \geq n - 1$ για κάθε n και διότι $n - 1 \to +\infty$.

Άσκηση 2.3.32. *Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Αποδείξτε το ίδιο με αύξουσα ακολουθία ρητών.*

Λύση: Πριν από τη λύση θα κάνουμε ένα μικρό σχόλιο. Αν μας έλεγαν ότι ο x είναι ρητός, το πρόβλημα θα ήταν πολύ εύκολο: θα θεωρούσαμε την σταθερή ακολουθία (x) όλοι οι όροι της οποίας είναι ρητοί και η οποία συγκλίνει στον x. Άρα το πρόβλημα έχει ουσιαστικό ενδιαφέρον μόνο όταν ο x είναι άρρητος.

Προκαταρκτικές σκέψεις:
Τώρα, για να βρούμε ρητούς οι οποίοι πλησιάζουν τον x θα ξεκινήσουμε με διαστήματα τα οποία συρρικνώνονται στον x και μέσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα επιλέξουμε έναν αντίστοιχο ρητό. Επειδή τα διαστήματα τα έχουμε πάρει να συρρικνώνονται στον x, συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχοι ρητοί πλησιάζουν τον x.
Γιατί πρέπει να ξεκινήσουμε με διαστήματα και όχι κατ' ευθείαν με ρητούς; Διότι δεν υπάρχει τύπος που να δίνει ρητό αριθμό κοντά στον τυχαίο αριθμό x. Ενώ, αντιθέτως, υπάρχει τύπος που να δίνει ένα μικρό διάστημα κοντά στον x. Για παράδειγμα:

$(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ με $n \in \mathbb{N}$. Και μετά πώς θα βρούμε ρητό μέσα σε ένα τέτοιο διάστημα; Μα γι αυτόν τον σκοπό δεν χρειάζεται τύπος για τον ρητό: μας αρκεί ότι η πυκνότητα των ρητών εξασφαλίζει την ύπαρξη ρητού σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα.
Πάμε στην λύση.
Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$\Big(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\Big) \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός, τον συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x-\frac{1}{n} < r_n < x+\frac{1}{n} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.

Για να βρούμε *αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$ κάνουμε μια μικρή αλλαγή στην επιλογή των διαστημάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε διαστήματα τα οποία πλησιάζουν τον x και, συγχρόνως, το καθένα από αυτά τα διαστήματα θα βρίσκεται δεξιά του προηγουμένου διαστήματος.
Θεωρούμε, λοιπόν, τα ανοικτά διαστήματα

$$\Big(x-\frac{1}{n}, x-\frac{1}{n+1}\Big) \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει ρητός, τον συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x-\frac{1}{n} < r_n < x-\frac{1}{n+1} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι έχουμε ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.
Επίσης, η (r_n) είναι αύξουσα διότι το διάστημα $(x-\frac{1}{n}, x-\frac{1}{n+1})$ στο οποίο ανήκει ο r_n είναι αριστερά του διαστήματος $(x-\frac{1}{n+1}, x-\frac{1}{n+2})$ στο οποίο ανήκει ο r_{n+1}.

Άσκηση 2.3.17. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Λύση: Ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δεν υπάρχει προφανής τρόπος απλοποίησης του λόγου $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$.
Μας έρχεται η έμπνευση να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}}{\frac{(3n)!}{(n!)^3}} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\Big(\frac{n!}{(n+1)!}\Big)^3 = \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(3n)!}\,\frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3} = \frac{27n^3+\cdots}{n^3+\cdots} \to 27.\end{aligned}$$

Επειδή $27>1$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 2.4.1. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Λύση: Όπως στην προηγούμενη άσκηση, ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δεν υπάρχει προφανής τρόπος απλοποίησης του λόγου $\frac{2^n n!}{n^n}$. Χρησιμοποιούμε πάλι το κριτήριο λόγου:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{2^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

Επειδή $\frac{2}{e} < 1$, συνεπάγεται $x_n \to 0$.

Άσκηση 2.3.14. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}.$$

Λύση: Σκεφτόμαστε ότι ο αριθμός $[\sqrt{n}]$ διαφέρει από τον $\sqrt{n}$ κατά μια ποσότητα η οποία είναι (απολύτως) < 1, δηλαδή "αμελητέα" σε σχέση με τον $\sqrt{n}$. Επομένως, ο $[\sqrt{n}]$ είναι περίπου ίσος με τον $\sqrt{n}$ και αυτό σημαίνει ότι, όταν ο n είναι πολύ μεγάλος, ο λόγος $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$ είναι περίπου ίσος με τον λόγο $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$. Περιμένουμε, λοιπόν, το όριο που ζητάμε να είναι 1.

Σε αυτόν τον συλλογισμό πρέπει να δώσουμε "μαθηματική" μορφή. Πώς θα εκφράσουμε με "μαθηματικό" τρόπο την βασική ιδέα του συλλογισμού ότι ο $[\sqrt{n}]$ διαφέρει από τον $\sqrt{n}$ κατά μια ποσότητα η οποία είναι (απολύτως) < 1; Μα με την γνωστή ανισότητα

$$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1.$$

Αυτήν την ανισότητα την γράφουμε

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

και μετά

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$$

και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα παρεμβολής για να βρούμε ότι

$$\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1.$$

ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 2.3.33. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $> \sup A$ αλλά και ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $\sup A$.*

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $> \sup A$ αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση που το $\sup A$ είναι αριθμός (δηλαδή, που το A είναι άνω φραγμένο). Διότι στην περίπτωση $\sup A = +\infty$ είναι προφανές ότι δεν μπορεί να υπάρχει ακολουθία με όριο $> +\infty$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $x > \sup A$. Επειδή ισχύει $x_n \in A$ για κάθε n, ισχύει και $x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Και, επειδή $x_n \to x$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων συνεπάγεται $x \leq \sup A$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $> \sup A$.
Μια άλλη διατύπωση του ίδιου συλλογισμού είναι η εξής. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο A με όριο x. (Δεν υποθέτουμε τίποτα για τη σχέση του x με το $\sup A$.) Επειδή ισχύει $x_n \in A$ για κάθε n, ισχύει και $x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Και, επειδή $x_n \to x$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων συνεπάγεται $x \leq \sup A$. Άρα κάθε ακολουθία στο A η οποία έχει όριο έχει το όριό της $\leq \sup A$. Άρα δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $> \sup A$.
Τώρα στο δεύτερο μέρος. Θα χρειαστεί να διακρίνουμε περιπτώσεις: το $\sup A$ είναι $+\infty$ ή αριθμός.
Έστω $\sup A = +\infty$, οπότε το A δεν είναι άνω φραγμένο.
Χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.

Προκαταρκτικές σκέψεις:
Το πρόβλημα είναι ότι δεν "γνωρίζουμε" το σύνολο A, οπότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε (σχεδιάζοντας, ίσως, το A) κάποια συγκεκριμένη ακολουθία στο A η οποία τείνει στο $+\infty$. Ούτε μπορούμε να πάρουμε κάποια συγκεκριμένη γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, για παράδειγμα την (n), διότι δεν γνωρίζουμε αν οι όροι της είναι στοιχεία του άγνωστου συνόλου A. Αναγκαστικά, η λύση θα έχει "υπαρξιακό χαρακτήρα". Θα αποδείξουμε ότι αυτό που ζητάμε "υπάρχει" χωρίς να μπορούμε να το καταδείξουμε (με τύπο για παράδειγμα). Το ίδιο είχε γίνει στην προηγούμενη διάλεξη με την άσκηση 2.3.32.
Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, ακόμη κι αν αυτή δεν είναι στο A, και μετά, βασισμένοι στο ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο, θα "βρούμε" μια άλλη ακολουθία *στο* A η οποία θα είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη και, επομένως, θα είναι αναγκασμένη να τείνει κι αυτή στο $+\infty$.
Ακριβώς την ίδια ιδέα χρησιμοποιήσαμε και στην άσκηση 2.3.32. Πήραμε τις δυο ακολουθίες $(x - \frac{1}{n})$ και $(x + \frac{1}{n})$, οι οποίες τείνουν στον x, (χωρίς να μας ενδιαφέρει αν οι όροι τους είναι ρητοί) και ανάμεσά τους "εγκλωβίσαμε" μια ακολουθία ρητών (r_n), βασισμένοι στην πυκνότητα των ρητών. Επειδή και οι δυο αυτές ακολουθίες τείνουν στον x, η (r_n) αναγκάζεται να τείνει κι αυτή στον x.

Συνεχίζουμε με την λύση.
Θεωρούμε την ακολουθία (n) η οποία έχει όριο $+\infty$. Επειδή το A δεν είναι άνω φραγμένο, για κάθε n υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A το οποίο είναι $> n$. Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$x_n > n.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $x_n > n$ για κάθε

n. Επειδή $n \to +\infty$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.
Τώρα, έστω ότι το $\sup A$ είναι αριθμός, οπότε το A είναι άνω φραγμένο.
(Οδηγούμενοι από τις παραπάνω σκέψεις, θα θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε γνωστή ακολουθία οι όροι της οποίας αυξάνονται και τείνουν στο $\sup A$, χωρίς να μας νοιάζει αν ανήκουν στο A, και ανάμεσα σ' αυτήν την ακολουθία και στο $\sup A$ θα "εγκλωβίσουμε" μια ακολουθία στο A.)
Θεωρούμε την ακολουθία $(\sup A - \frac{1}{n})$ η οποία τείνει στο $\sup A$ και όλοι οι όροι της είναι $< \sup A$. Από μια χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι πιο κοντά στο $\sup A$ από τον αριθμό $\sup A - \frac{1}{n}$.
Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $x_n \to \sup A$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $\sup A$.

Συνεχίζουμε με θεωρία.

ΕΓΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ. *Έστω ακολουθία διαστημάτων*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots .$$

Υποθέτουμε ότι τα διαστήματα είναι "εγκιβωτισμένα", δηλαδή ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *για κάθε* n*. Τότε οι ακολουθίες* (a_n), (b_n) *συγκλίνουν και υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα.*

Απόδειξη. Σχεδιάζουμε πρόχειρα τα διαστήματα:

Παρατηρούμε αμέσως ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και ότι η (b_n) είναι φθίνουσα. Άρα η (a_n) έχει όριο αριθμό ή $+\infty$ και η (b_n) έχει όριο αριθμό ή $-\infty$. Βλέπουμε, όμως, ότι η (a_n) είναι και άνω φραγμένη από τον b_1 και ότι η (b_n) είναι κάτω φραγμένη από τον a_1. Άρα οι (a_n), (b_n) έχουν και οι δυο όρια αριθμούς.
Έστω, λοιπόν,

$$a_n \to a \qquad \text{και} \qquad b_n \to b.$$

Κατόπιν, επειδή ισχύει

$$a_n \leq b_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται

$$a \leq b.$$

Μια σκέψη:
Και τα δυο ενδεχόμενα, $a = b$ και $a < b$, είναι δυνατά. Θεωρήστε για παράδειγμα τα διαστήματα $[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$, από τα οποία προκύπτει $a = b = 2$, και τα διαστήματα $[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$, από τα οποία προκύπτει $a = 2$ και $b = 3$.

Μάλιστα, επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_n \leq a \qquad \text{και} \qquad b \leq b_n$$

για κάθε n.
Με βάση τα νέα στοιχεία, ξανασχεδιάζουμε:

Επομένως, αποδείξαμε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν αλλά και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα. Αυτοί οι αριθμοί είναι, προφανώς, όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $[a, b]$. $\square$

Μερικά ακόμη συμπεράσματα στο Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων.

(1) Αν $a = b$, τότε το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο και ο μοναδικός αριθμός x που ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα είναι ο $x = a = b$. Αν, όμως, $a < b$, τότε υπάρχουν άπειροι αριθμοί που καθένας τους ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα: όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $[a, b]$ που τώρα δεν είναι μονοσύνολο.

(2) Υπάρχει ένα κριτήριο το οποίο μας λέει πότε υπάρχει ακριβώς ένας x ο οποίος ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα και πότε υπάρχουν περισσότεροι από ένας τέτοιοι x. Το κριτήριο αυτό έχει να κάνει με τα μήκη $b_n - a_n$ των εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Συγκεκριμένα: επειδή $b_n - a_n \to b - a$,
(i) αν $b_n - a_n \to 0$, τότε $b - a = 0$, οπότε $b = a$ και υπάρχει μόνο ένας x κοινός σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.
(ii) αν $b_n - a_n \not\to 0$, τότε $b - a \neq 0$, οπότε $b \neq a$ (δηλαδή $a < b$) και υπάρχουν άπειροι x κοινοί σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

(3) Η ακολουθία $(b_n - a_n)$ των μηκών των εγκιβωτισμένων διαστημάτων συγκλίνει στο $b - a$, δηλαδή στο μήκος του διαστήματος που περιέχει ακριβώς τους αριθμούς τους κοινούς σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

(4) Το διάστημα $[a, b]$ είναι η *τομή* όλων των εγκιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$.

ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Από τους δείκτες

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

κάνουμε μια *γνησίως αύξουσα* επιλογή *άπειρων* δεικτών (δηλαδή φυσικών)

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots$$

και κατόπιν θεωρούμε τους αντίστοιχους όρους της αρχικής ακολουθίας:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \ldots.$$

Έτσι δημιουργείται μια καινούργια ακολουθία και, επειδή οι όροι της είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής ακολουθίας, λέμε ότι η καινούργια ακολουθία (x_{n_k}) είναι **υποακολουθία** της αρχικής (x_n).

Προσέξτε ότι ο δείκτης της υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k. Πράγματι, σκεφτείτε το μέτρημα: πρώτος όρος ο x_{n_1}, δεύτερος όρος ο x_{n_2}, τρίτος όρος ο x_{n_3} και, γενικά, k-οστός όρος ο x_{n_k}.

Προσέξτε επίσης ότι οι δείκτες n_k της αρχικής ακολουθίας (x_n) πρέπει να αυξάνονται γνησίως. Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$n_k < n_{k+1}$$

για κάθε k. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος $x_{n_{k+1}}$ "έρχεται μετά" από τον x_{n_k} στην ακολουθία (x_n) (χωρίς να είναι αναγκαστικά διαδοχικοί).

Υπάρχουν άπειρες υποακολουθίες μιας ακολουθίας. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα τα οποία παρουσιάζονται συχνά είναι τα εξής:

Η λεγόμενη **υποακολουθία των περιττών δεικτών**, όπου $n_k = 2k - 1$ για κάθε k, είναι η

$$x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Η λεγόμενη **υποακολουθία των άρτιων δεικτών**, όπου $n_k = 2k$ για κάθε k, είναι η

$$x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Τέλος, επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k, βρίσκουμε την ίδια την αρχική ακολουθία

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Πρέπει, όμως, να καταλάβουμε ότι οι υποακολουθίες μιας ακολουθίας δεν περιορίζονται σ' αυτά τα κάπως "κανονικά" παραδείγματα. Γενικά, δημιουργούμε υποακολουθία παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_1 και τον αντίστοιχο όρο x_{n_1}, κατόπιν παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_2 μετά από τον n_1 (οσοδήποτε μακρυά από τον n_1) και τον αντίστοιχο όρο x_{n_2}, κατόπιν παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_3 μετά από τον n_2 (οσοδήποτε μακρυά από τον n_2) και τον αντίστοιχο όρο x_{n_3} κλπ.

Τώρα, είναι προφανές ότι ισχύει

$$n_1 \geq 1$$

ακριβώς διότι ο n_1 είναι φυσικός. Κατόπιν, σκεφτόμαστε ότι οι n_1, n_2 είναι φυσικοί, οπότε απέχουν τουλάχιστον μια μονάδα και, επομένως,

$$n_2 \geq n_1 + 1 \geq 1 + 1 = 2.$$

Ομοίως, οι n_2, n_3 είναι φυσικοί, οπότε απέχουν τουλάχιστον μια μονάδα και, επομένως,

$$n_3 \geq n_2 + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

και, επαγωγικά, βλέπουμε ότι ισχύει

$$n_k \geq k$$

για κάθε k. Επομένως,

$$n_k \to +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε

$$x_n \to x.$$

(Το x μπορεί να είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$.)
Θεωρούμε οποιαδήποτε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x_n \to x$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$x_n \in N_x(\epsilon) \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Τώρα, επειδή $n_k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα)

$$n_k \geq n_0.$$

Άρα ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα)

$$x_{n_k} \in N_x(\epsilon).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε ϵ ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα) $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως,

$$x_{n_k} \to x.$$

□

Η τελευταία Πρόταση (η Πρόταση 2.14 στο βιβλίο) χρησιμοποιείται πολύ συχνά με "αρνητικό" τρόπο: αν βρούμε δυο υποακολουθίες μιας ακολουθίας οι οποίες έχουν διαφορετικά όρια, τότε συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία δεν έχει όριο. Τυπικό παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots,$$

δηλαδή η $\big((-1)^{n-1}\big)$. Γνωρίζουμε ήδη, μέσω προηγούμενης Πρότασης, ότι η ακολουθία αυτή δεν έχει όριο. Αλλά μπορούμε να το δούμε και μέσω των υποακολουθιών των περιττών και των άρτιων δεικτών. Η πρώτη υποακολουθία είναι η σταθερή ακολουθία

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

και έχει όριο 1 και η δεύτερη είναι η σταθερή ακολουθία

$$-1, -1, -1, -1, \ldots$$

και έχει όριο -1.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν οι υποακολουθίες των περιττών δεικτών και των άρτιων δεικτών μιας ακολουθίας έχουν το ίδιο όριο, τότε και η ακολουθία έχει το ίδιο όριο.*

Δεν θα αποδείξουμε αυτήν την Πρόταση, την Πρόταση 2.15 του βιβλίου. Μπορείτε να διαβάσετε μόνοι σας την απόδειξη. Θα δούμε, όμως, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1, \\
x_2 &= 1 - \frac{1}{2}, \\
x_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\
x_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\
x_5 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

και, γενικότερα,

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Αν πάρουμε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, βλέπουμε εύκολα ότι είναι (γνησίως) φθίνουσα:

$$1 > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\Big) > \dots$$

διότι κάθε παρένθεση αποτελεί έναν θετικό αριθμό.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η ίδια υποακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον 0, αφού για παράδειγμα

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) + \frac{1}{7} > 0.$$

Κατόπιν, έχουμε ότι η υποακολουθία των άρτιων δεικτών είναι (γνησίως) αύξουσα, αφού

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) < \dots,$$

και άνω φραγμένη από τον 1, αφού για παράδειγμα

$$1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \frac{1}{6} < 1.$$

Άρα και οι δυο υποακολουθίες έχουν όρια αριθμούς: έστω

$$x_{2k-1} \to x' \qquad \text{και} \qquad x_{2k} \to x''.$$

Επειδή

$$x_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

και

$$x_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1},$$

έχουμε ότι

$$x_{2k-1} - x_{2k} = \frac{1}{2k} \to 0.$$

Επειδή απο την άλλη μεριά ισχύει $x_{2k-1} - x_{2k} \to x' - x''$, συμπεραίνουμε ότι $x' - x'' = 0$, οπότε

$$x' = x''.$$

Άρα οι δυο υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο, έστω $x = x' = x''$, οπότε και η ακολουθία (x_n) έχει όριο τον αριθμό x.
Αξίζει να παρατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της (x_n) σε σχέση με το όριο x:

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k} < \ldots < x < \ldots < x_{2k-1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον x και, ομοίως, η (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x.
Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα διαστήματα $[x_2, x_1]$, $[x_4, x_3]$, $[x_6, x_5]$, $\ldots$ είναι εγκιβωτισμένα και ότι το όριο x είναι ο μοναδικός αριθμός που περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα.

Και τώρα πάμε να αποδείξουμε ένα από τα σημαντικότερα Θεωρήματα της Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) η οποία είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει

$$l \le x_n \le u$$

για κάθε n. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει.
Θα αρχίσουμε να χωρίζουμε το διάστημα $[l, u]$ σε όλο και μικρότερα διαστήματα με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο που θα περιγράψουμε αμέσως.

Κατ' αρχάς χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$ και $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι

οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). (Αν ένα τσουβάλι περιέχει άπειρα πράγματα και χωρίσουμε το τσουβάλι σε δυο τσουβάλια, τότε ένα τουλάχιστον από τα δυο τσουβάλια θα περιέχει άπειρα από τα ίδια πράγματα.)
Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. (Αν το δεξιό ημιδιάστημα περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και το αριστερό ημιδιάστημα περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ το δεξιό ημιδιάστημα. Αν το δεξιό ημιδιάστημα περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους της (x_n) και το αριστερό ημιδιάστημα περιέχει άπειρους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ το αριστερό ημιδιάστημα. Αν και τα δυο ημιδιαστήματα περιέχουν άπειρους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ ένα οποιοδήποτε από τα δυο ημιδιαστήματα.)
Κατόπιν, χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$ και $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ (ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα).
Κατόπιν, χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$ και $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μια ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων

$$[l_1, u_1], [l_2, u_2], [l_3, u_3], \ldots .$$

Από το Θεώρημα για τα Εγκιβωτισμένα Διαστήματα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα αυτά τα διαστήματα. Μάλιστα μπορούμε να δούμε ότι κάθε φορά τα μήκη των διαστημάτων υποδιπλασιάζονται:

$$u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}, \quad u_2 - l_2 = \frac{u_1 - l_1}{2} = \frac{u-l}{2^2}, \quad u_3 - l_3 = \frac{u_2 - l_2}{2} = \frac{u-l}{2^3}$$

και, επαγωγικά,

$$u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k},$$

οπότε

$$u_k - l_k \to 0.$$

Άρα, πάλι από το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων και τη συζήτηση μετά από αυτό, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[l_k, u_k]$ είναι μοναδικός και είναι το κοινό όριο των ακολουθιών (l_k) και (u_k). Δηλαδή

$$l_k \to x \qquad \text{και} \qquad u_k \to x.$$

Τώρα γυρνάμε πίσω στην αρχική ακολουθία (x_n) και θα δούμε πώς θα επιλέξουμε μια συγκλίνουσα υποακολουθία της.
Επειδή το διάστημα $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω

$$x_{n_1} \in [l_1, u_1].$$

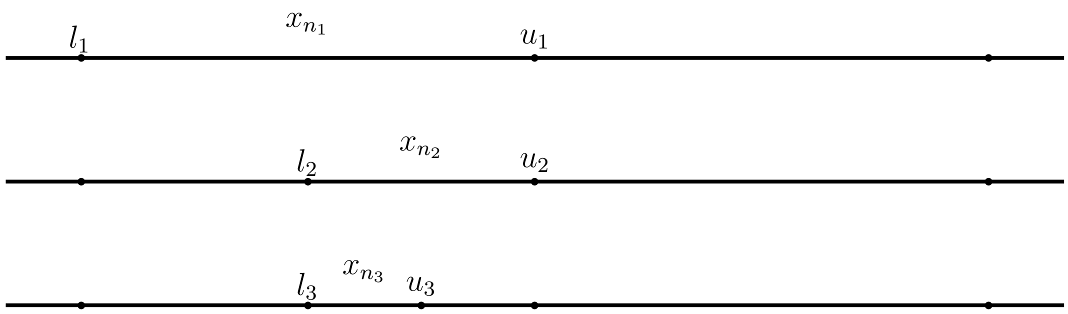
Κατόπιν, επειδή και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω

$$x_{n_2} \in [l_2, u_2].$$

Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.
Κατόπιν, επειδή το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω

$$x_{n_3} \in [l_3, u_3].$$

Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.
Άρα το προηγούμενο σχήμα αναδιαμορφώνεται ως εξής:



Συνεχίζοντας επ' άπειρον, σχηματίζουμε μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Το ότι η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία έχει να κάνει με το ότι προσέξαμε ώστε η επιλογή των δεικτών n_k να είναι *γνησίως αύξουσα.*
Τώρα, αυτή η υποακολουθία έχει την ιδιότητα να ισχύει

$$l_k \leq x_{n_k} \leq u_k$$

για κάθε k και, επειδή $l_k \to x$ και $u_k \to x$, συνεπάγεται

$$x_{n_k} \to x.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. $\square$

Προσέξτε τον "υπαρξιακό χαρακτήρα" αυτής της απόδειξης. Επειδή η ακολουθία (x_n) δεν είναι συγκεκριμένη, δεν μπορούμε να βρούμε συγκεκριμένη υποακολουθία της η οποία να συγκλίνει. Αν είχαμε, για παράδειγμα, την γνωστή μας ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$, η οποία είναι φραγμένη, τότε θα μπορούσαμε να υποδείξουμε συγκεκριμένη συγκλίνουσα υποακολουθία της: είτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών είτε την υποακολουθία των άρτιων δεικτών.

ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Το Θεώρημα των Bolzano και Weierstrass συμπληρώνεται με την εξής Πρόταση (2.16 του βιβλίου).

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Κάθε όχι άνω φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία με όριο $+\infty$.*

[β] *Κάθε όχι κάτω φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία με όριο $-\infty$.*

Μπορείτε να διαβάσετε μόνοι σας την απόδειξη. Ας δούμε, καλύτερα, μερικά σχετικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Μια ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη, είναι κάτω φραγμένη και δεν έχει όριο.
Για να βρούμε μια τέτοια ακολουθία σκεφτόμαστε ότι, βάσει της τελευταίας Πρότασης, πρέπει να έχει μια υποακολουθία με όριο $+\infty$ και, επειδή δεν πρέπει να έχει όριο, καλό θα ήταν να έχει και μια δεύτερη υποακολουθία με όριο $\neq +\infty$. Τέλος, επειδή η ακολουθία πρέπει να είναι κάτω φραγμένη, δεν πρέπει να έχει υποακολουθία με όριο $-\infty$. Άρα θα βρούμε μια ακολουθία η οποία να σχηματίζεται από δυο υποακολουθίες, η μία με όριο $+\infty$ και η άλλη με όριο έναν αριθμό.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Τώρα είναι προφανές πώς θα βρούμε ακολουθία η οποία δεν είναι κάτω φραγμένη, είναι άνω φραγμένη και δεν έχει όριο.

(2) Μια ακολουθία όχι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.
Τώρα σκεφτόμαστε ότι μια τέτοια ακολουθία, βάσει της τελευταίας Πρότασης, πρέπει να έχει μια υποακολουθία με όριο $+\infty$ και μια υποακολουθία με όριο $-\infty$. Άρα θα βρούμε μια ακολουθία η οποία να σχηματίζεται από δυο υποακολουθίες, η μία με όριο $+\infty$ και η άλλη με όριο $-\infty$.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Άσκηση 2.5.1. *Βρείτε πολύ απλή ακολουθία με τρεις υποακολουθίες, οι οποίες να έχουν όρια a, b, c, αντιστοίχως, όπου a, b, c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί.*

Λύση: Η ακολουθία

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Ερώτηση: Τί θα κάνετε αν τα a, b, c είναι στοιχεία του $\overline{\mathbb{R}}$ και όχι αναγκαστικά και τα τρία αριθμοί;

Άσκηση 2.4.8[β]. *Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει*

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \qquad \textit{(αναδρομικός τύπος)}$$

για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

Λύση: Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι:

$$x_1,\ x_2 = \sqrt{2x_1},\ x_3 = \sqrt{2x_2} = \sqrt{2\sqrt{2x_1}},\ x_4 = \sqrt{2x_3} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x_1}}},\ \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Έτσι, είναι σαφής ο μηχανισμός σχηματισμού των όρων της ακολουθίας, αλλά δεν είναι εύκολο να γράψουμε απλό τύπο για τον n-οστό όρο της και δεν θα μας βοηθήσει κάτι τέτοιο στον χειρισμό της ακολουθίας.
Επειδή πρέπει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη, αρχίζουμε μελετώντας την ανισότητα

$$x_n \le x_{n+1}$$

ή την ισοδύναμη

$$x_n \le \sqrt{2x_n}.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της (x_n) είναι > 0, οπότε θα μπορούμε να χειριζόμαστε κάπως ελεύθερα διάφορες ανισότητες που θα παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της λύσης.
Άρα η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την

$${x_n}^2 \le 2x_n$$

κι αυτή με την

$$x_n \le 2.$$

Έχουμε, δηλαδή, τις ισοδυναμίες

$$x_n \le x_{n+1} \iff x_n \le 2$$

$$x_{n+1} \le x_n \iff 2 \le x_n.$$

Βλέπουμε ότι η σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον επόμενό του εξαρτάται άμεσα από τη σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον αριθμό 2. Και είναι απολύτως σαφές ότι, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία αύξουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≤ 2 ενώ, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία φθίνουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≥ 2.
Θα διακρίνουμε, επομένως, δυο περιπτώσεις: να είναι $x_1 \le 2$ ή να είναι $x_1 \ge 2$. Στην πρώτη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≤ 2, οπότε η (x_n) θα είναι αύξουσα, και στη δεύτερη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≥ 2, οπότε η (x_n) θα είναι φθίνουσα.
Έστω, λοιπόν,

$$0 < x_1 \le 2.$$

Πάμε με επαγωγή. Αν υποθέσουμε

$$x_n \le 2 \qquad \text{για κάποιον } n,$$

τότε

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Άρα ισχύει

$$x_n \le 2 \qquad \text{για κάθε } n$$

και η (x_n) είναι αύξουσα.
Όμως, είμαστε ευτυχείς διότι έχουμε ταυτόχρονα αποδείξει ότι η (x_n) είναι *και άνω*

φραγμένη από τον 2. Άρα η (x_n) συγκλίνει και μένει να βρούμε το όριό της.
Αν

$$x_n \to x,$$

τότε ο αναδρομικός τύπος

$$x_{n+1}^2 = 2x_n$$

συνεπάγεται

$$x^2 = 2x,$$

οπότε

$$x = 0 \qquad \text{ή} \qquad x = 2.$$

Η περίπτωση $x = 0$ απορρίπτεται, διότι η (x_n) είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι $x_1 > 0$. Άρα $x = 2$, οπότε

$$x_n \to 2.$$

Αν υποθέσουμε

$$x_1 \geq 2,$$

τότε πάλι με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι ισχύει

$$x_n \geq 2 \qquad \text{για κάθε } n$$

και η (x_n) είναι φθίνουσα (και κάτω φραγμένη από τον 2). Και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι πάλι

$$x_n \to 2.$$

Σχόλιο: Η άσκηση ζητά να αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία είναι μονότονη και κατόπιν να βρούμε το όριό της. Όμως, η άσκηση θα μπορούσε να είναι διατυπωμένη ως εξής.

Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία έχει όριο και βρείτε το.

Τότε θα πρέπει να *υποψιαστούμε* ότι η (x_n) μπορεί να είναι μονότονη και να ακολουθήσουμε με δική μας πρωτοβουλία την παραπάνω λύση.

Άσκηση 2.4.15. *Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο*

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αυτές οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Τί συμπεραίνετε για την αρχική ακολουθία (x_n);

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα γράφουμε διαδοχικά τις ισοδύναμες ανισότητες

$$n{x_n}^2 \leq (n+1){x_{n+1}}^2$$

$$n\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} \leq (n+1)\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2(2n+1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2(2n+2)^2}$$

$$n \leq (n+1)\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}$$

$$4n(n+1)^2 \leq (n+1)(2n+1)^2$$
$$4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$
$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1,$$

η οποία είναι προφανώς σωστή. Άρα η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\left((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\right)$ είναι φθίνουσα. Κάντε το εσείς.
Για να αποδείξουμε ότι οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρώτη είναι και άνω φραγμένη και ότι η δεύτερη είναι και κάτω φραγμένη. Σ' αυτό μας βοηθά η απλή παρατήρηση ότι ισχύει

$$n{x_n}^2 \leq \Big(n + \frac{1}{2}\Big){x_n}^2$$

για κάθε n. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η διάταξη των όρων των δυο ακολουθιών είναι κάπως έτσι:

Παρατηρούμε ότι υπάρχει άμεση σχέση με το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων. Αμέσως φαίνεται ότι η πρώτη ακολουθία είναι άνω φραγμένη από τον $(1+\frac{1}{2}){x_1}^2$ και ότι η δεύτερη ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον $1{x_1}^2$. Άρα και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν και απομένει να αποδείξουμε ότι έχουν το ίδιο όριο.

Σκέψεις:
Αν ακολουθήσουμε το πλαίσιο του Θεωρήματος των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων, στοχεύουμε στο να αποδείξουμε ότι τα μήκη των συγκεκριμένων εγκιβωτισμένων διαστημάτων τείνουν στον 0, δηλαδή ότι

$$\Big(n + \frac{1}{2}\Big){x_n}^2 - n{x_n}^2 \to 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}\,{x_n}^2 \to 0.$$

Αυτό, όμως, φαίνεται να ζορίζει λιγάκι, οπότε κοιτάμε μπας και σκεφτούμε κάτι πιο δημιουργικό.
Γενικά, αν έχουμε δυο συγκλίνουσες ακολουθίες (y_n) και (z_n) με αντίστοιχα όρια y και z (αριθμούς) και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $y = z$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $y_n - z_n \to 0$, διότι τότε θα συμπεράνουμε (από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $y - z = 0$ και, επομένως, $y = z$. Αυτήν ακριβώς την ιδέα χρησιμοποιεί το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων. Όμως, υπάρχει και μια δεύτερη ιδέα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\frac{y_n}{z_n} \to 1$. Τότε θα συμπεράνουμε (πάλι από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $\frac{y}{z} = 1$ και, επομένως, $y = z$. (Φυσικά θα πρέπει να ισχύει $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.)
Τέλος σκέψεων.

Συνεχίζουμε με τη λύση.
Έστω

$$n{x_n}^2 \to x' \qquad \text{και} \qquad \Big(n + \frac{1}{2}\Big){x_n}^2 \to x''.$$

Τότε, επειδή $x' \neq 0$ (διότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι > 0), έχουμε

$$\frac{(n+\frac{1}{2}){x_n}^2}{n{x_n}^2} \to \frac{x''}{x'}.$$

Αλλά

$$\frac{(n+\frac{1}{2}){x_n}^2}{n{x_n}^2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n} \to 1,$$

οπότε $\frac{x''}{x'} = 1$ και άρα

$$x' = x''.$$

Άρα οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο $x = x' = x''$.
Τέλος, από την

$$n{x_n}^2 \to x$$

συνεπάγεται

$${x_n}^2 = \frac{1}{n} \cdot n{x_n}^2 \to 0 \cdot x = 0$$

και, επομένως,

$$x_n \to 0.$$

Σχόλιο: Αν θέλουμε να αποδείξουμε *κατ' ευθείαν* ότι η αρχική ακολουθία (x_n) έχει όριο (και μάλιστα τον 0) θα δυσκολευτούμε αρκετά. Ο τύπος του x_n αποτελεί απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ούτε απλοποιείται εύκολα. Μπορούμε να δοκιμάσουμε, όπως σε ανάλογα παραδείγματα και ασκήσεις, το κριτήριο λόγου. Κάνοντας απλοποιήσεις βρίσκουμε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1.$$

Όμως, το κριτήριο λόγου δεν έχει κανένα συμπέρασμα για την περίπτωση $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$. Έχει γενικό συμπέρασμα μόνο στις περιπτώσεις που το όριο a του λόγου $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq a < 1$ ή την $a > 1$.

Άσκηση 2.5.7. *Έστω $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$, όπου τα $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι διαφορετικά (και άρα η (x_n) δεν έχει όριο). Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) έτσι ώστε $x_{n_k} \to x$. Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.*

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}). Τότε αυτοί οι κοινοί όροι των δυο ακολουθιών αποτελούν υποακολουθία της (x_{n_k}) αλλά και της (x_{2k}). Αυτή η συγκεκριμένη κοινή υποακολουθία έχει, επομένως, όριο x (ως υποακολουθία της πρώτης) και όριο a (ως υποακολουθία της δεύτερης). Λόγω μοναδικότητας του ορίου, συνεπάγεται $x = a$.
Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k-1}), τότε $x = b$.
Αλλά δεν μπορεί να ισχύει $x = a$ *και* $x = b$, διότι $a \neq b$.
Άρα δεν είναι δυνατό η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}). Από την άλλη μεριά, η (x_{n_k}) *πρέπει* να έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Αυτό είναι προφανές, αφού οι (x_{2k}) και (x_{2k-1}) σχηματίζουν ολόκληρη την ακολουθία (x_n). Άρα, σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή, πρέπει να ισχύει $x = a$ ή $x = b$.

ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία (x_n) η οποία συγκλίνει. Δηλαδή

$$x_n \to x$$

για κάποιον αριθμό x. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι όροι x_n πλησιάζουν τον x (καθώς ο n μεγαλώνει) και, επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι διάφοροι όροι x_n και x_m της ακολουθίας πλησιάζουν ο ένας τον άλλον (καθώς οι n, m μεγαλώνουν). Πώς θα το δούμε αυτό με αυστηρό τρόπο; Πώς θα δούμε ότι η απόσταση ανάμεσα στους όρους x_n και x_m θα γίνει όσο θέλουμε μικρή όταν οι n, m γίνουν κατάλληλα μεγάλοι; Παίρνουμε έναν τυχόντα $\epsilon > 0$ και σκεφτόμαστε ότι για να γίνει η απόσταση ανάμεσα στους x_n και x_m μικρότερη από ϵ αρκεί να γίνει η απόσταση καθενός από τους x_n και x_m από τον x μικρότερη από $\frac{\epsilon}{2}$. Οπότε, αφού ξέρουμε ότι $x_n \to x$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Τώρα, αλλάζοντας το σύμβολο του δείκτη από n σε m, έχουμε ότι ισχύει

$$|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε. Και τώρα αυτό ακριβώς (δηλαδή το συμπέρασμα) θα το βαφτίσουμε *ορισμό* μιας ειδικής ιδιότητας των ακολουθιών.

Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Με άλλα λόγια, μια ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν ο ένας τον άλλο (όταν οι δείκτες τους μεγαλώνουν).

Αυτό που κάναμε πριν δώσουμε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy είναι ότι αποδείξαμε την Πρόταση 2.17 του βιβλίου, δηλαδή την

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο αυτής της Πρότασης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Αν μια ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός x ώστε η (x_n) να συγκλίνει στον x.

Σκέψεις:
Τώρα το πρόβλημα που έχουμε είναι πολύ πιο δύσκολο από το πρόβλημα στην απόδειξη της προηγούμενης Πρότασης. Στην προηγούμενη Πρόταση γνωρίζουμε ότι οι όροι της ακολουθίας, παρά το ότι είναι μεταβλητοί, πλησιάζουν έναν δοσμένο σταθερό αριθμό και βγάζουμε αμέσως το προφανές συμπέρασμα ότι οι μεταβλητοί αυτοί όροι πλησιάζουν ο ένας τον άλλον. Στην παρούσα κατάσταση γνωρίζουμε ότι οι μεταβλητοί όροι πλησιάζουν ο ένας τον άλλο, αλλά δεν είναι προφανές ότι αυτοί θα πλησιάζουν κάποιον σταθερό αριθμό. Και το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος δοσμένος αριθμός ώστε να αποδείξουμε ότι οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν αυτόν τον αριθμό.
Πίσω στην απόδειξη:

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη.
Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy με έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, για παράδειγμα τον $\epsilon = 1$, και βρίσκουμε ότι υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

(Μπορούμε να δουλέψουμε και με $\epsilon = 2$ ή $\epsilon = \frac{1}{2}$ ή οποιονδήποτε άλλον $\epsilon > 0$.)
Αφού αυτό ισχύει για κάθε $n, m \geq n_0$ θα ισχύει για $m = n_0$ και για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή ισχύει

$$|x_n - x_{n_0}| < 1 \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αυτό λέει ότι οι όροι

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots \qquad \text{κλπ}$$

βρίσκονται όλοι μέσα στο διάστημα

$$[-(1 + |x_{n_0}|), 1 + |x_{n_0}|].$$

Άρα έξω από αυτό το διάστημα είναι το πολύ κάποιοι από τους αρχικούς όρους

$$x_1, \ldots, x_{n_0-1}$$

και, επειδή αυτοί είναι πεπερασμένοι, μπορούμε να μεγαλώσουμε το διάστημα αυτό ώστε να συμπεριλάβουμε όλους τους όρους της (x_n) μέσα σε ένα κατάλληλο φραγμένο διάστημα. Άρα η (x_n) είναι φραγμένη.
Και τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για να συμπεράνουμε ότι η (x_n) έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Παίρνουμε μια τέτοια υποακολουθία (x_{n_k}) και το όριό της, έστω τον αριθμό x, οπότε

$$x_{n_k} \to x.$$

Σκέψεις:
Σ' αυτό ακριβώς το σημείο της απόδειξης εμφανίζεται για πρώτη φορά ένας σταθερός αριθμός x. Τώρα έχουμε ένα υποψήφιο όριο της ακολουθίας. Γιατί είναι *αυτός ειδικά* ο

αριθμός x το υποψήφιο όριο της (x_n). Μα είναι απλό. Αν η ακολουθία (x_n) έχει κάποιο όριο, τότε αυτό πρέπει να είναι όριο και της συγκεκριμένης υποακολουθίας (x_{n_k}) και, επομένως, πρέπει να είναι ο x.
Πίσω στην απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι
$$x_n \to x.$$
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει
$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{1}$$
Και επειδή $x_{n_k} \to x$, από κάποιον k και πέρα (μην ξεχνάμε ότι ο δείκτης της υποακολουθίας είναι ο k) ισχύει
$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Ακόμη, επειδή $n_k \to +\infty$, από κάποιον k και πέρα ισχύει
$$n_k \geq n_0.$$
Άρα από κάποιον k και πέρα ισχύει
$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad n_k \geq n_0.$$
Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιον k, δηλαδή έναν k για τον οποίο ισχύει $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $n_k \geq n_0$. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $m = n_k$ στην σχέση (1) και έτσι έχουμε ότι ισχύει
$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$
Αλλά έχουμε επίσης ότι $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και έτσι ισχύει
$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$
Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει
$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$
Άρα $x_n \to x$. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία
$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \\ x_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$
και, γενικότερα,
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Θα δούμε ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy.
Πράγματι, έχουμε

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Επομένως,

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ενώ οι δείκτες n και $2n$ μπορούν να γίνουν απεριόριστα μεγάλοι η απόσταση των όρων x_n και x_{2n} δεν γίνεται όσο θέλουμε μικρή: δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Άρα η (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy.
Τώρα, αυτό μας λέει ότι η (x_n) δεν συγκλίνει: αν συνέκλινε, τότε θα ήταν ακολουθία Cauchy.
Ναι, αλλά η (x_n) είναι προφανώς αύξουσα, οπότε γνωρίζουμε ότι *έχει όριο* το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Επειδή το όριο δεν μπορεί να είναι αριθμός, καταλήγουμε στο ότι

$$x_n \to +\infty.$$

Τώρα θα εξετάσουμε μια νέα έννοια, την έννοια του *υποακολουθιακού ορίου ακολουθίας.*

Λέμε ότι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι **υποακολουθιακό όριο** της ακολουθίας (x_n) αν το x είναι το όριο κάποιας υποακολουθίας της (x_n), δηλαδή αν υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε $x_{n_k} \to x$.

Παράδειγμα. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο x, τότε αυτό είναι το μοναδικό υποακολουθιακό όριό της.
Πράγματι, *κάθε* υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει όριο x.

Παράδειγμα. Η γνωστή μας ακολουθία (x_n) με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad \text{κλπ}$$

έχει υποακολουθιακά όρια τους αριθμούς -1 και 1, αφού η υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών έχουν αυτά τα δυο όρια.
Και τώρα σκεφτόμαστε μήπως υπάρχουν και άλλα υποακολουθιακά όρια της ίδιας ακολουθίας.
Ας υποθέσουμε ότι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), δηλαδή ότι $x_{n_k} \to x$ για κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Μα το συμπέραμα της άσκησης 2.5.7 που λύσαμε στο προηγούμενο μάθημα είναι ότι $x = -1$ ή $x = 1$.
Άρα τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n) είναι οι -1 και 1.

Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της Πρότασης 2.16 του βιβλίου συνοψίζονται ως εξής:

Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο.

Πράγματι. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο αριθμό και τότε αυτός ο αριθμός είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο $+\infty$ και τότε το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Και, τέλος, αν η (x_n)

δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο $-\infty$ και τότε το $-\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει υποακολουθιακό όριο κάποιο στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Και τώρα έχουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Το Θεώρημα 2.2 του βιβλίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε ακολουθία έχει ένα μέγιστο υποακολουθιακό όριο και ένα ελάχιστο υποακολουθιακό όριο.*

Δεν θα αποδείξουμε εδώ αυτό το Θεώρημα. Διαβάστε εσείς την απόδειξη. (Το γενικό σχήμα της απόδειξης έχει ως εξής. Θεωρούμε μια ακολουθία και το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της. Αυτό το σύνολο είναι μη-κενό, αφού η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο. Κατόπιν θεωρούμε το supremum και το infimum αυτού του συνόλου και αποδεικνύουμε ότι είναι *στοιχεία του συνόλου*, δηλαδή ότι είναι το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου, δηλαδή ότι είναι το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας.)

Το μέγιστο υποακολουθιακό όριο μιας ακολουθίας (x_n) το ονομάζουμε και **ανώτερο όριο** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε

$$\limsup x_n \qquad \text{ή} \qquad \overline{\lim}\, x_n.$$

Και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n) το ονομάζουμε και **κατώτερο όριο** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε

$$\liminf x_n \qquad \text{ή} \qquad \underline{\lim}\, x_n.$$

Σύμφωνα με τα πρώτο παράδειγμα που είδαμε προηγουμένως, αν η (x_n) έχει όριο x, τότε

$$\liminf x_n = \limsup x_n = x.$$

Και σύμφωνα με το δεύτερο παράδειγμα,

$$\liminf(-1)^{n-1} = -1, \qquad \limsup(-1)^{n-1} = 1.$$

ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα δούμε δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του lim sup και δυο αντίστοιχες ιδιότητες του lim inf μιας ακολουθίας. Είναι οι Προτάσεις 2.18 και 2.19 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] (i) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$*, τότε ισχύει τελικά* $x_n < x$.

(ii) *Αν* $x < \overline{\lim}\, x_n$*, τότε ισχύει* $x < x_n$ *για άπειρους* n.

[β] (i) *Αν* $x < \underline{\lim}\, x_n$*, τότε ισχύει τελικά* $x < x_n$.

(ii) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$*, τότε ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* n.

Απόδειξη. [α] (i) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$.
Θα υποθέσουμε (για άτοπο) ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει τελικά $x_n < x$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $\geq x$. Αυτοί οι άπειροι όροι σχηματίζουν υποακολουθία της (x_n) και αυτή η υποακολουθία έχει την ιδιότητα όλοι οι όροι της να είναι $\geq x$.
Τώρα, αυτή η υποακολουθία έχει με τη σειρά της (τουλάχιστον) μια υποακολουθία η οποία έχει όριο. (Είδαμε στο προηγούμενο μάθημα ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο.)
Αυτή η τελευταία υποακολουθία έχει, λοιπόν, τις εξής δυο ιδιότητες: αφ' ενός έχει όριο αφ' ετέρου όλοι οι όροι της είναι $\geq x$. (Πράγματι, οι όροι της τελευταίας υποακολουθίας είναι όροι της προηγούμενης υποακολουθίας οι οποίοι είναι όλοι $\geq x$.)
Άρα το όριο της τελευταίας υποακολουθίας είναι $\geq x$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccl}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & \\
 & x_2 & x_3 & & x_5 & & x_7 & & & x_{10} & & x_{12} & & x_{14} & \dots & \geq x \\
 & & x_3 & & & & x_7 & & & & & x_{12} & & & \dots & \geq x \quad \text{και με όριο}
\end{array}$$

Σκεφτόμαστε τώρα ότι όταν έχουμε μια ακολουθία και παίρνουμε μια υποακολουθία της και μετά παίρνουμε μια υποακολουθία αυτής της υποακολουθίας, τότε η τελευταία υποακολουθία είναι υποακολουθία της αρχικής ακολουθίας.
Άρα έχουμε μια υποακολουθία της (x_n) η οποία έχει όριο $\geq x$. Δηλαδή υπάρχει υποακολουθιακό όριο της (x_n) το οποίο είναι $\geq x$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι $\overline{\lim}\, x_n < x$ και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).

(ii) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$.
Επειδή το $\overline{\lim}\, x_n$ *είναι* υποακολουθιακό όριο της (x_n), υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε οι όροι της υποακολουθίας αυτής είναι τελικά $> x$, οπότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $> x$.

[β] Με "συμμετρικό" τρόπο. $\square$

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

[β] *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ *και, σ' αυτήν την περίπτωση, ισχύει* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

Απόδειξη. [α] Προφανές, αφού το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).

[β] Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.
Τότε, όπως έχουμε ήδη πει, το $\lim x_n$ είναι το μοναδικό και, επομένως, το μέγιστο και ταυτόχρονα το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ και ας ορίσουμε, για συντομία,

$$x = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$x_n \to x.$$

Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση που ο x είναι αριθμός. Οι άλλες δυο περιπτώσεις είναι ανάλογες.
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή

$$\overline{\lim}\, x_n = x < x + \epsilon,$$

από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x_n < x + \epsilon.$$

Και, επειδή

$$x - \epsilon < x = \underline{\lim}\, x_n,$$

πάλι από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x - \epsilon < x_n.$$

Άρα ισχύει τελικά

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon.$$

Άρα $x_n \to x$. □

Άσκηση 2.7.1. *Έστω $a < b$. Βρείτε το* lim sup *και το* lim inf *της ακολουθίας*

$$a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, \ \ldots \qquad \textit{κλπ.}$$

Λύση: Είναι σαφές ότι υπάρχει υποακολουθία με όριο a (για παράδειγμα η υποακολουθία με δείκτες που είναι πολλαπλάσια του 3 συν 1) και υποακολουθία με όριο b (για παράδειγμα η υποακολουθία με δείκτες που είναι πολλαπλάσια του 3). Άρα οι αριθμοί a και b είναι υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας.
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της ακολουθίας με όριο x.
Επειδή, όμως, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\leq b$, και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\leq b$. Άρα και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\leq b$.
Ομοίως, επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\geq a$, και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\geq a$, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\geq a$.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους a, b. Άρα το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας είναι το b και το ελάχιστο είναι το a.
Δηλαδή

$$\underline{\lim}\, x_n = a \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}\, x_n = b.$$

Σχόλιο: Αποδείξαμε ότι το τυχόν υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους a, b. Αφήνουμε δηλαδή ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχει υποακολουθιακό όριο διαφορετικό από τους a, b. *Μπορείτε να αποδείξετε ότι οι a, b είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας;*

Άσκηση 2.7.2. *Βρείτε τα* lim sup *και* lim inf *των ακολουθιών*

$$\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right), \quad \left((-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right), \quad \left((-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Λύση: Η πρώτη περίπτωση είναι απλή. Επειδή

$$\frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n} \to 1,$$

συνεπάγεται

$$\underline{\lim}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) = \overline{\lim}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) = 1.$$

Για την δεύτερη ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

έχουμε ότι

$$x_{2k} = -\left(1-\frac{1}{2k}\right) = -1 + \frac{1}{2k} \to -1$$

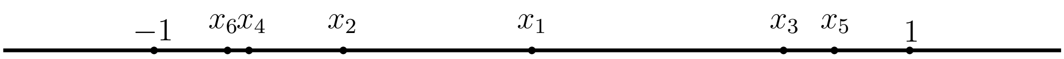
και

$$x_{2k-1} = +\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = 1 - \frac{1}{2k-1} \to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).
Τώρα έχουμε δυο τρόπους να συνεχίσουμε.
Πρώτος τρόπος:
Το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 (που το ξαναχρησιμοποιήσαμε προηγουμένως ... δείτε πώς) είναι ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Δεύτερος τρόπος:
Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} φθίνουν προς τον -1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_2 = -\frac{1}{2}$. Οι x_{2k-1} αυξάνονται προς τον 1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_1 = 0$. Άρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι ανάμεσα στους -1 και 1.
Και τώρα συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση με τους a και b.



Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία της ακολουθίας με όριο x.
Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1, συνεπάγεται ότι και οι όροι της υποακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1.

Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους $-1, 1$. Άρα $\underline{\lim}\, x_n = -1$ και $\overline{\lim}\, x_n = 1$.

Σχόλιο: Ο πρώτος τρόπος δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην προηγούμενη άσκηση 2.7.1. Γιατί; Μπορείτε να τον προσαρμόσετε και να τον εφαρμόσετε στην άσκηση 2.7.1;

Για την τρίτη ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$$

έχουμε ότι

$$x_{2k} = -\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big) = -1 - \frac{1}{2k} \to -1$$

και

$$x_{2k-1} = +\Big(1 + \frac{1}{2k-1}\Big) = 1 + \frac{1}{2k-1} \to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).
Και πάλι έχουμε δυο τρόπους να συνεχίσουμε.
Πρώτος τρόπος:
Πάλι το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 μας λέει ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = -1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = 1.$$

Δεύτερος τρόπος:
Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} αυξάνονται προς τον -1 και οι x_{2k-1} φθίνουν προς τον 1. Άρα οι όροι της (x_n) βρίσκονται όλοι έξω από το διάστημα $[-1, 1]$ και αυτό δεν επιτρέπει να προχωρήσουμε όπως με την αμέσως προηγούμενη ακολουθία. Οπότε θα σκεφτούμε κάτι διαφορετικό.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της ακολουθίας με όριο x.
Παίρνουμε και έναν τυχόντα αριθμό $x' > 1$.

Επειδή $x_{2k-1} \to 1$, όλοι οι όροι x_{2k-1} από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$. Από την άλλη μεριά, όλοι οι όροι x_{2k} είναι προφανώς $\leq x'$, οπότε όλοι οι όροι x_n από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$. Άρα και όλοι οι όροι της υποακολουθίας (x_{n_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$. Άρα και το όριο x της (x_{n_k}) είναι $\leq x'$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι το οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας έχει την εξής ιδιότητα: ισχύει $x \leq x'$ για κάθε $x' > 1$. Γνωρίζουμε, όμως, ήδη από το πρώτο-πρώτο μάθημα, ότι αυτό συνεπάγεται $x \leq 1$.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ≤ 1. Άρα ο 1 είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n), οπότε $\overline{\lim}\, x_n = 1$.
Με "συμμετρικό" τρόπο αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}\, x_n = -1$.

ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

ονομάζεται **σειρά**.

Όταν έχουμε μια σειρά ανακύπτουν συνήθως κάποια ερωτήματα: η σειρά συγκλίνει; η σειρά αποκλίνει; έχει η σειρά άθροισμα; και, αν έχει η σειρά άθροισμα, ποιά είναι η τιμή του; Και τώρα αμέσως θα δώσουμε νόημα σε αυτά τα ερωτήματα.
Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

και, γενικότερα,

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \qquad \text{για κάθε } \ n.$$

Το άθροισμα s_n ονομάζεται n-οστό **μερικό άθροισμα** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και η ακολουθία (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της σειράς.
Αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει** και το όριο s της (s_n), το οποίο είναι αριθμός, λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο** $+\infty$ και το όριο $+\infty$ της (s_n) λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty.$$

Ομοίως, αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο** $-\infty$ και το όριο $-\infty$ της (s_n) λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty.$$

Αν η ακολουθία (s_n) δεν έχει όριο, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει άθροισμα**.
Ο x_n ονομάζεται n-οστός **όρος** ή **προσθετέος** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Επισημαίνουμε ότι το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός, είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \qquad \text{ή} \qquad 1+1+1+\cdots+1+\cdots .$$

Τα μερικά αθροίσματά της είναι διαδοχικά $s_1 = 1$, $s_2 = 1+1 = 2$, $s_3 = 1+1+1 = 3$ και, γενικότερα,

$$s_n = 1+\cdots+1 = n$$

για κάθε n. Επειδή $s_n = n \to +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα. Η λεγόμενη *μηδενική σειρά* είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 \qquad \text{ή} \qquad 0+0+0+\cdots+0+\cdots .$$

Τα μερικά αθροίσματα είναι $s_1 = 0$, $s_2 = 0+0 = 0$, $s_3 = 0+0+0 = 0$ και, γενικότερα,

$$s_n = 0+\cdots+0 = 0$$

για κάθε n. Επειδή $s_n = 0 \to 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Παράδειγμα. Η **γεωμετρική σειρά** με λόγο a είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \qquad \text{ή} \qquad 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots .$$

Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+a$, $s_3 = 1+a+a^2$ και, γενικότερα,

$$s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1}$$

για κάθε n. Έχουμε ξαναδεί την ακολουθία (s_n). Το ευτύχημα με αυτήν την ακολουθία (πράγμα που δεν συμβαίνει συνήθως με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μιας οποιασδήποτε σειράς) είναι ότι υπάρχει *απλός συνοπτικός* τύπος του n-οστού όρου s_n. Πράγματι:

$$s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1} = \begin{cases} \frac{a^n-1}{a-1}, & \text{αν } a \neq 1 \\ n, & \text{αν } a = 1 \end{cases}$$

Βάσει των διαφόρων περιπτώσεων για το όριο της γεωμετρικής προόδου (a^n), έχουμε ότι

$$\lim s_n \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Επομένως, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ ή $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα και είναι ένα απλό χαρακτηριστικό παράδειγμα που δείχνει ότι χρειάζεται κάποια λεπτότητα και περίσκεψη στον χειρισμό των σειρών. Για παράδειγμα, έχω ακούσει πολλές φορές το βιαστικό συμπέρασμα ότι η σειρά αυτή έχει άθροισμα 0. Η αιτιολόγηση είναι "λογική" και βασίζεται στις διαγραφές των διαδοχικών προσθετέων:

$$\underbrace{1+(-1)}+\underbrace{1+(-1)}+\underbrace{1+(-1)}+\underbrace{1+(-1)}+\cdots=0+0+0+0+\cdots=0.$$

Όμως, κάποιος μπορεί να ισχυριστεί, εξίσου βιαστικά, ότι η σειρά έχει άθροισμα 1 με την εξίσου "λογική" αιτιολόγηση:

$$1+\underbrace{(-1)+1}+\underbrace{(-1)+1}+\underbrace{(-1)+1}+\underbrace{(-1)+1}+\cdots=1+0+0+0+0+\cdots=1.$$

Ένας προσεκτικός μελετητής θα κάνει τις διαδοχικές αθροίσεις (δηλαδή την διαδικασία που ακολουθούμε στην καθημερινή ζωή όταν έχουμε να προσθέσουμε πολλούς αριθμούς) ως εξής:

$$\begin{aligned}
s_1&=1\\
s_2&=1+(-1)=0\\
s_3&=\big(1+(-1)\big)+1=0+1=1\\
s_4&=\big(1+(-1)+1\big)+(-1)=1+(-1)=0
\end{aligned}$$

κλπ. Έτσι θα δει ότι η ακολουθία των διαδοχικών αθροισμάτων είναι η

$$1,0,1,0,1,0,1,\ \ldots \qquad \text{κλπ}$$

και θα αποφασίσει ότι η σειρά δεν έχει άθροισμα.

Ακολουθούν μερικά μη-τετριμμένα παραδείγματα που τα έχουμε μελετήσει στο πλαίσιο των ακολουθιών.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n=1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

για κάθε n. Γνωρίζουμε ότι $s_n\to e-1$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e-1$ και, επομένως,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e.$$

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

για κάθε n. Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Άρα η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\text{ συγκλίνει.}$$

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται **αρμονική σειρά** και έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

για κάθε n. Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \to 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω s το άθροισμά της. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ για τα οποία ισχύει

$$s_n \to s.$$

Τότε, όμως,

$$x_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

□

Η Πρόταση αυτή, δηλαδή η Πρόταση 8.1 του βιβλίου, χρησιμοποιείται πολύ συχνά με "αρνητικό τρόπο".

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Το πρώτο πράγμα που κοιτάμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι αν ισχύει $x_n \to 0$ ή όχι. Αν δεν ισχύει $x_n \to 0$, τότε αμέσως συμπεραίνουμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Αν ισχύει $x_n \to 0$, τότε αυτό είναι ένδειξη ότι η σειρά *μπορεί να* συγκλίνει.

Παράδειγμα. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Όμως, $\frac{1}{n} \to 0$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι *δεν ισχύει το αντίστροφο της τελευταίας Πρότασης*. Και μας λέει ότι αν $x_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ μπορεί να συγκλίνει αλλά μπορεί και να μην συγκλίνει και ότι χρειάζεται περαιτέρω μελέτη για να καταλήξουμε στο αν συγκλίνει η σειρά ή όχι.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$.*

Διαβάστε την απόδειξη μόνοι σας. Διαβάστε επίσης και κάποια απλά πράγματα για την λεγόμενη *αλλαγή δείκτη* όπως και για τα σύμβολα $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Σχηματίζουμε τα αθροίσματα $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε n. Τότε $r_n \to 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι ο αριθμός s. Τότε

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = s \\
r_2 &= x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = s - x_1 = s - s_1 \\
r_3 &= x_3 + x_4 + \cdots = s - x_1 - x_2 = s - s_2 \\
r_4 &= x_4 + \cdots = s - x_1 - x_2 - x_3 = s - s_3
\end{aligned}$$

και, γενικότερα,

$$r_n = s - s_{n-1}$$

για κάθε n. Επειδή $s_n \to s$, συνεπάγεται

$$r_n = s - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

□

Διαβάστε τις αποδείξεις των επόμενων δυο Προτάσεων από το βιβλίο. Είναι οι Προτάσεις 8.4 και 8.5.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Αυτό το αποτέλεσμα γράφεται και

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \cdots = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Και αυτό το αποτέλεσμα γράφεται και

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \cdots = \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots).$$

Να πούμε μόνο ότι η μόνη περίπτωση να είναι η παράσταση $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ απροσδιόριστη μορφή είναι όταν $\lambda = 0$ και, συγχρόνως, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \pm\infty$. Τότε, όμως, η κατάσταση είναι εξ αρχής απροσδόκητα απλή: επειδή $\lambda = 0$, κάθε όρος λx_n είναι $= 0$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Η επόμενη Πρόταση, η 8.6 του βιβλίου, είναι αρκετά σημαντική.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n.*

[α] *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*

Αν, επιπλέον, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε n.

[β] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.*

[γ] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t,$$

όπου $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$.
Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα των δυο σειρών:

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \qquad \text{και} \qquad t_n = y_1 + \cdots + y_n.$$

Επειδή

$$s_n \to s \qquad \text{και} \qquad t_n \to t$$

και επειδή ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \le y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται $s \le t$.
Έστω, επιπλέον, ότι $x_{n_0} < y_{n_0}$ και $s, t \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$t_n - s_n = (y_1 - x_1) + \cdots + (y_{n_0} - x_{n_0}) + \cdots + (y_n - x_n) \ge y_{n_0} - x_{n_0},$$

επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι μη-αρνητικές και ο $y_{n_0} - x_{n_0}$ είναι ένας από τους όρους του αθροίσματος.
Τώρα, έχουμε ότι

$$t_n - s_n \to t - s$$

και άρα

$$t - s \ge y_{n_0} - x_{n_0} > 0.$$

[β] Όπως πριν, ισχύει $s_n \le t_n$ για κάθε n. Άρα, αν $s_n \to +\infty$, τότε $t_n \to +\infty$.
[γ] Όπως στο [β]. $\square$

ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Σήμερα θα δούμε κάποια πράγματα για μια σημαντική ειδική κατηγορία σειρών, εκείνες που έχουν *όλους τους προσθετέους τους μη-αρνητικούς*. Και θα αρχίσουμε με ένα σημαντικό Θεώρημα, το 8.1 του βιβλίου. Το Θεώρημα αυτό έχει δύσκολη απόδειξη. Αυτό όμως δεν φαίνεται διότι χρησιμοποιούμε ένα άλλο προηγούμενο Θεώρημα, εκείνο για το όριο μονότονης ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, τότε το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και το άθροισμα είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.*

Απόδειξη. Για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς έχουμε τον γνωστό τύπο

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

Επειδή το άθροισμα s_{n+1} προκύπτει από το s_n με την πρόσθεση του προσθετέου x_{n+1}, ο οποίος είναι ≥ 0, το s_{n+1} είναι $\geq$ του s_n. Με σύμβολα:

$$s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n.$$

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει οπωσδήποτε όριο, έστω s, το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, το s είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Όμως, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι εξ ορισμού το όριο της (s_n).
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η σειρά έχει άθροισμα s και ότι αυτό είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και ότι αυτό είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Μένει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα s της σειράς είναι ≥ 0. Επειδή ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0 + \cdots + 0 = 0$$

για κάθε n. Άρα και το όριο s της (s_n), δηλαδή το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, είναι ≥ 0. □

Το βασικό συμπέρασμα του Θεωρήματος είναι ότι *κάθε σειρά μη-αρνητικών προσθετέων έχει άθροισμα*. Ας ξαναδιατυπώσουμε, όμως και τα άλλα συμπεράσματα του Θεωρήματος:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \text{αριθμός} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{η } (s_n) \text{ είναι άνω φραγμένη.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{η } (s_n) \text{ δεν είναι άνω φραγμένη.}$$

Και κάτι ακόμη. Αν το άθροισμα της σειράς είναι $+\infty$ τότε δεν είναι αριθμός. Αυτό είναι τελείως προφανές όποια κι αν είναι η σειρά. Όμως, ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν το άθροισμα της σειράς δεν είναι αριθμός, τότε, επειδή μιλάμε για σειρά *μη-αρνητικών προσθετέων*, το άθροισμά της υπάρχει και είναι $+\infty$. Επομένως, για σειρά μη-αρνητικών προσθετέων ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{η } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ συγκλίνει.}$$

Για γενικές σειρές ισχύει, όπως είπαμε, ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Leftarrow \quad \text{η } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ συγκλίνει.}$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά μη-αρνητικών όρων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς έχει τύπο

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Δυστυχώς δεν υπάρχει συνοπτικός τύπος γι αυτό το άθροισμα και για να δούμε αν η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη θα κάνουμε ένα κόλπο: γράφουμε

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{kk} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \geq 2$ και τότε:

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\
&\leq 1 + \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\Big) + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\
&= 1 + 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \cdots \underbrace{- \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-2}} \underbrace{- \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \\
&= 1 + 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 - \frac{1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε η σειρά συγκλίνει ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αναφέρω, τελείως πληροφοριακά, ότι το άθροισμα της συγκεκριμένης σειράς είναι ο αριθμός $\frac{\pi^2}{6}$. (Η απόδειξη είναι “άλλη υπόθεση”.)

Οι επόμενες δυο Προτάσεις μαζί είναι η Πρόταση 8.7 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n. Τότε $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.*

Απόδειξη. Επειδή οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν μη-αρνητικούς προσθετέους, συνεπάγεται ότι έχουν άθροισμα. Άρα από μια προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι από την υπόθεση ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n συνεπάγεται

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Τώρα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, οπότε από την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ και $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι φραγμένη (ή, ειδικώτερα, ότι συγκλίνει). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.*

Απόδειξη. Αν η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι φραγμένη, υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει

$$0 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq M$$

για κάθε n και, επομένως,

$$x_n \leq M y_n$$

για κάθε n. Άρα,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M y_n = M \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$$

επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

Εφαρμογή: Έστω ότι ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και

$$\frac{x_n}{y_n} \to \rho.$$

Επειδή ισχύει $\frac{x_n}{y_n} > 0$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$0 \leq \rho \leq +\infty.$$

Και τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
&\text{Αν } 0 \leq \rho < +\infty \text{ τότε :} \quad && \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty. \\
&\text{Αν } 0 < \rho \leq +\infty \text{ τότε :} \quad && \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Leftarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty. \\
&\text{Αν } 0 < \rho < +\infty \text{ τότε :} \quad && \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty.
\end{aligned}$$

Το πρώτο συμπέρασμα είναι άμεσο πόρισμα της τελευταίας Πρότασης: το όριο ρ της $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι αριθμός και, επομένως, η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι πάλι πόρισμα της ίδιας Πρότασης αλλά με αντιστροφή των ρόλων των δυο σειρών. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\rho}$ και ότι $0 \leq \frac{1}{\rho} < +\infty$. Τέλος, το τρίτο συμπέρασμα είναι συνδυασμός των δυο πρώτων.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Επειδή

$$\frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \neq 0$$

η σειρά δεν συγκλίνει.
Όμως, επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς προσθετέους, έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Το άθροισμα δεν είναι αριθμός (διότι η σειρά δεν συγκλίνει), οπότε το άθροισμα είναι $+\infty$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = +\infty.$$

Παράδειγμα. Τώρα θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Ο κύριος όρος στον παρονομαστή του n-οστού προσθετέου είναι ο n^2, οπότε ο n-οστός προσθετέος $\frac{n}{n^2+1}$ συμπεριφέρεται περίπου όπως ο $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
Αυτό μας λέει ότι η δοσμένη σειρά σχετίζεται με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και αυτό θα το εξετάσουμε βασισμένοι στην τελευταία Πρόταση. Έχουμε, λοιπόν,

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1.$$

Επειδή το όριο 1 του λόγου των n-οστών όρων των δυο σειρών έχει την ιδιότητα

$$0 < 1 < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι, αν μια από τις δυο σειρές συγκλίνει, τότε και η άλλη σειρά συγκλίνει.
Όμως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} = +\infty.$$

ΕΙΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά μη-αρνητικών προσθετέων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n}$$

και θέλουμε να δούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$.
Ο κυρίαρχος όρος στον αριθμητή του n-οστού προσθετέου είναι ο 3^n και στον παρονομαστή ο 4^n. Αυτό, ως γνωστόν, σημαίνει ότι

$$\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0, \qquad \frac{n}{3^n} \to 0, \qquad \frac{n^2}{4^n} \to 0.$$

Άρα ο n-οστός προσθετέος

$$x_n = \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n}$$

συμπεριφέρεται παρόμοια με τον

$$y_n = \frac{3^n}{4^n}.$$

(Έτσι καταλαβαίνουμε ότι $x_n \to 0$ και συνεχίζουμε τη μελέτη της σειράς.)
Άρα οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ πρέπει να σχετίζονται κι αυτό το διαπιστώνουμε μέσω του ορίου

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n} \cdot \frac{4^n}{3^n} = \frac{1 + \frac{2^n}{3^n} + \frac{n}{3^n}}{\frac{n^2}{4^n} + 1} \to 1.$$

Επειδή

$$0 < 1 < +\infty,$$

είτε και οι δυο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δυο σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < +\infty,$$

συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n} < +\infty.$$

Παράδειγμα. Κατόπιν παίρνουμε την

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Αυτή η σειρά έχει θετικούς προσθετέους διότι ισχύει $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε n.
Επίσης, ισχύει $\sin\frac{1}{n} \to 0$. Αυτό το καταλαβαίνουμε διότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο 0 και, επομένως, έχουμε $\sin\frac{1}{n} \to \sin 0 = 0$ αφού $\frac{1}{n} \to 0$. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε είναι μέσω της γνωστής ανισότητας $\sin x \leq x$, η οποία ισχύει για κάθε $x \geq 0$. Πράγματι, έχουμε $0 \leq \sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ και από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\sin\frac{1}{n} \to 0$.
Τώρα θυμόμαστε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

από το οποίο παίρνουμε

$$\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή

$$0 < 1 < +\infty,$$

οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ είτε και οι δυο συγκλίνουν είτε και οι δυο αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα θα δούμε ένα πολύ σημαντικό κριτήριο σύγκλισης για σειρές με *φθίνοντες* μη-αρνητικούς όρους.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα. Έστω και μια συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n.*

Τότε υπάρχει το $\int_1^{+\infty} f(u)\,du = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(u)\,du < +\infty$,

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(u)\,du = +\infty$.

Επίσης, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(u)\,du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\,du \qquad \text{για κάθε } n$$

και

$$\int_1^{+\infty} f(u)\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(u)\,du.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι ισχύει $f(u) \geq 0$ για κάθε $u \geq 1$.
Έστω $u \geq 1$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq u$ και τότε, επειδή η f είναι φθίνουσα, έχουμε

$$f(u) \geq f(n) = x_n \geq 0.$$

Κατόπιν ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο

$$F(t) = \int_1^t f(u)\,du \qquad \text{για } t \geq 1.$$

Η F είναι το λεγόμενο αόριστο ολοκλήρωμα της f και θα δούμε ότι είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$.
Έστω $1 \leq t' \leq t''$. Τότε, επειδή ισχύει $f(u) \geq 0$ για κάθε u στο διάστημα $[t', t'']$, συνεπάγεται $\int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq 0$ και, επομένως,

$$F(t'') = \int_1^{t''} f(u)\,du = \int_1^{t'} f(u)\,du + \int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq \int_1^{t'} f(u)\,du = F(t').$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du = \int_1^{+\infty} f(u)\,du$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$.

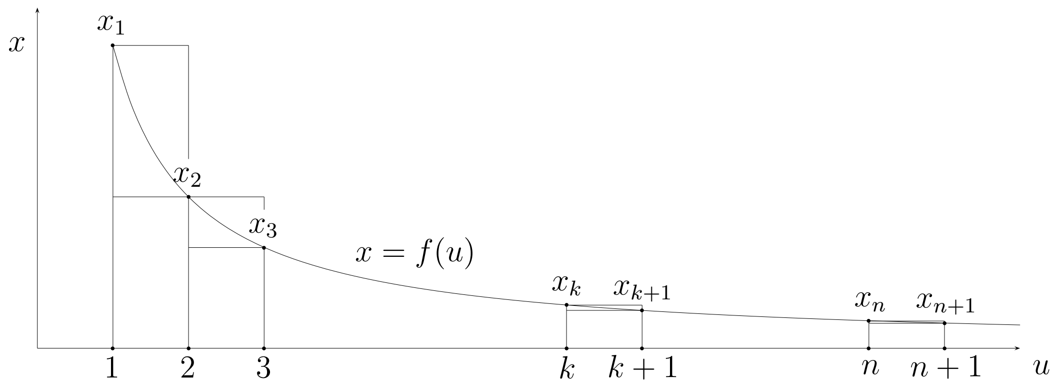
(*Υπενθύμιση από τον Απειροστικό Λογισμό:* Το $\int_1^{+\infty} f(u)\,du$ είναι το *γενικευμένο ολοκλήρωμα* της f στο διάστημα $[1, +\infty)$ και *ορίζεται* να είναι το όριο $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du$ όταν αυτό το όριο υπάρχει. Εμείς μόλις αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που εξετάζουμε το όριο αυτό υπάρχει.)

Και πάλι έχουμε ότι ισχύει $F(t) = \int_1^t f(u)\,du \geq 0$ για κάθε $t \geq 1$, οπότε και το όριο $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_1^{+\infty} f(u)\,du$ είναι ≥ 0. Δηλαδή

$$0 \leq \int_1^{+\infty} f(u)\,du \leq +\infty.$$

Από την άλλη μεριά, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα, το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty.$$



Για να συσχετίσουμε την σειρά με το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f θα συσχετίσουμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς με το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αυτό γίνεται ως εξής.
Επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(k+1) \leq f(u) \leq f(k) \qquad \text{για } \ k \leq u \leq k+1,$$

οπότε

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,du \leq \int_k^{k+1} f(u)\,du \leq \int_k^{k+1} f(k)\,du = f(k)$$

και, επειδή $f(k) = x_k$ και $f(k+1) = x_{k+1}$, έχουμε

$$x_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(u)\,du \leq x_k.$$

Αυτή η ανισότητα λέει, σε γεωμετρική γλώσσα, ότι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f και πάνω από το διάστημα $[k, k+1]$ του u-άξονα είναι μεγαλύτερο (με την ευρεία έννοια) από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση το διάστημα $[k, k+1]$ και ύψος $f(k+1) = x_{k+1}$ και μικρότερο (με την ευρεία έννοια) από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση το διάστημα $[k, k+1]$ και ύψος $f(k) = x_k$. Αυτό είναι φανερό στο σχήμα και οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα.
Τώρα προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε

$$x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{και} \qquad \int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n,$$

αντιστοίχως και, επομένως,

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du.$$

Παίρνοντας τα όρια των τριών παραστάσεων της τελευταίας διπλής ανισότητας (γνωρίζουμε ήδη ότι αυτά τα όρια υπάρχουν), βρίσκουμε

$$\int_1^{+\infty} f(u)\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(u)\, du.$$

Τα (i), (ii) είναι άμεσες συνέπειες της τελευταίας ανισότητας. □

Παράδειγμα. Θα μελετήσουμε την *πολύ σημαντική* σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Το p είναι μια παράμετρος η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και καθε τιμή του p ορίζει και μια αντίστοιχη σειρά. Τις ειδικές περιπτώσεις με $p = 1$ και $p = 2$ τις έχουμε ήδη μελετήσει.
Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.
Τώρα έχουμε δυο περιπτώσεις.
Αν $p \leq 0$, τότε ισχύει $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Αν $p > 0$, τότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Επομένως, θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(u) = \frac{1}{u^p} \qquad \text{για } u \geq 1,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους προσθετέους της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Τώρα υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Είναι

$$\int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \quad \text{αν } p \neq 1 \qquad \text{και} \qquad \int_1^t \frac{1}{u}\, du = \log t.$$

Επομένως,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^p}\, du = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \begin{cases} \frac{1}{p-1} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Άρα, συμπεριλαμβάνοντας και την περίπτωση $p \leq 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικώτερα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα δούμε μια ακόμη εφαρμογή του Κριτηρίου του Ολοκληρώματος.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι η αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει στο $+\infty$, το οποίο φυσικά σημαίνει ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αποκλίνει στο $+\infty$. Δηλαδή,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

Τώρα μας ενδιαφέρει να δούμε "πόσο γρήγορα" τείνει η ακολουθία αυτή στο $+\infty$ και θα χρησιμοποιήσουμε έναν από τους τύπους που εμφανίζονται στην Πρόταση με το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.
Θεωρούμε, λοιπόν, την συνάρτηση με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u} \qquad \text{για } u \geq 1,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους προσθετέους της αρμονικής σειράς.
Ο τύπος που μας ενδιαφέρει είναι ο

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{u}\, du \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{u}\, du \qquad \text{για κάθε } \ n.$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, βρίσκουμε για κάθε n ότι

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

Διαιρώντας με το $\log n$ βρίσκουμε

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} \leq \frac{1}{\log n} + 1$$

και, εφαρμόζοντας την ιδιότητα παρεμβολής,

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} \to 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι *το μερικό άθροισμα* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *της αρμονικής σειράς αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνεται ο* $\log n$.
Μπορούμε να δούμε και κάτι ακόμη πιο συγκεκριμένο. Επειδή $\log n \leq \log(n+1)$, από τον τύπο που έχουμε παραπάνω (πριν διαιρέσουμε με το $\log n$) βρίσκουμε

$$\log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

οπότε
$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1$$
για κάθε n.
Αυτό μας λέει ότι το άθροισμα $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ διαφέρει από τον $\log n$ κατά το πολύ μια μονάδα και, επομένως, αυτές οι δυο ποσότητες είναι ουσιαστικά "ίσες" καθώς το n μεγαλώνει.
Και για να πάρουμε μια πιο απτή ιδέα για τα πραγματικά μεγέθη, ας θεωρήσουμε τον αριθμό $n = 2^{300}$. Τότε
$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{300}} - \log 2^{300} \leq 1,$$
οπότε
$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{300}} - 300 \log 2 \leq 1.$$
Επειδή $\log 2 = 0.30102999566\ldots$, έχουμε ότι
$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{300}} - 90.3089986992 \leq 1,$$
οπότε
$$90.3089986992 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{300}} \leq 91.3089986992.$$
Δηλαδή, η αρμονική σειρά αποκλίνει μεν στο $+\infty$ αλλά με τόσο αργό ρυθμό ώστε να πρέπει να αθροίσουμε πάνω από τους πρώτους 2^{300} (ένα ασύλληπτα μεγάλο πλήθος) προσθετέτους της ώστε να φτάσουμε σε άθροισμα μεγαλύτερο του 92.
Και κάτι τελευταίο. Είδαμε παραπάνω ότι η ακολουθία με n-οστό όρο
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$
είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$. Εντελώς πληροφοριακά, θα αναφέρω ότι αυτή η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό (δείτε την άσκηση 2.4.6 του βιβλίου) ο οποίος συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα γ και ο οποίος ονομάζεται *σταθερά του Euler*:
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \to \gamma.$$
Αποτελεί ανοικτό πρόβλημα ακόμη στα Μαθηματικά να απαντηθεί το ερώτημα αν ο αριθμός γ είναι ρητός ή άρρητος.

Τώρα θα πούμε κάποια πράγματα για τα λεγόμενα *δεκαδικά αναπτύγματα* αριθμών.

Μια ακολουθία (x_n) ονομάζεται **ακολουθία δεκαδικών ψηφίων** αν όλοι οι όροι της είναι στοιχεία του συνόλου $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και αν η ακολουθία αυτή δεν είναι τελικά σταθερή 9. Αυτό το τελευταίο σημαίνει ότι ισχύει $x_n \neq 9$ για άπειρους n.

Θεωρούμε τώρα μια οποιαδήποτε ακολουθία δεκαδικών ψηφίων (x_n) και σχηματίζουμε την σειρά
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots .$$

Μια τέτοια σειρά, η οποία προέρχεται από μια ακολουθία δεκαδικών ψηφίων, ονομάζεται **δεκαδική σειρά** και είναι μια σειρά μη-αρνητικών προσθετέων, οπότε έχει άθροισμα αριθμό ≥ 0 ή $+\infty$. Όμως, επειδή ισχύει $0 \leq x_n \leq 9$ για κάθε n, έχουμε ότι

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = \frac{9}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \cdots\Big) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Αν, μάλιστα, σκεφτούμε ότι ένας τουλάχιστον από τους x_n είναι ≤ 8 και όχι 9, δηλαδή ότι ένας από τους λόγους $\frac{x_n}{10^n}$ είναι $\leq \frac{8}{10^n}$ και όχι $\frac{9}{10^n}$, συμπεραίνουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι γνήσια. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = \frac{9}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \cdots\Big) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Άρα το άθροισμα κάθε δεκαδικής σειράς είναι αριθμός στο διάστημα $[0, 1)$.

Τώρα θα δούμε και το αντίστροφο. Δηλαδή ότι για κάθε αριθμό στο $[0, 1)$ υπάρχει μια δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός.

Θεωρούμε έναν x στο $[0, 1)$ και χωρίζουμε το διάστημα αυτό στα 10 διαδοχικά διαστήματα

$$\Big[0, \frac{1}{10}\Big), \Big[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\Big), \ldots, \Big[\frac{9}{10}, 1\Big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10}$. Προφανώς, ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα, αφού τα διαστήματα αυτά είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους είναι το $[0, 1)$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{10} \leq x < \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10} \qquad \text{για κάποιον } \ x_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Τώρα, χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{10}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10})$ που προέκυψε, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{10}$, στα 10 διαδοχικά διαστήματα

$$\Big[\frac{x_1}{10}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10^2}\Big), \Big[\frac{x_1}{10} + \frac{1}{10^2}, \frac{x_1}{10} + \frac{2}{10^2}\Big), \ldots, \Big[\frac{x_1}{10} + \frac{9}{10^2}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10}\Big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και, όπως πριν, έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x < \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Είναι φανερό ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επαγωγικά επ' άπειρον, βρίσκοντας σε κάθε βήμα ένα διάστημα μέσα στο διάστημα που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και με υποδεκαπλάσιο μήκος, το οποίο να περιέχει τον αρχικό αριθμό x. Έτσι θα δημιουργηθεί μια ακολουθία δεκαδικών ψηφίων (x_n) για την οποία θα ισχύει

$$\frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} \leq x < \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Άρα ορίζονται τρεις ακολουθίες: η (x_n), η (s_n) και η (t_n). Οι δυο τελευταίες έχουν τύπους

$$s_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

και ισχύει

$$s_n \leq x < t_n$$

για κάθε n. Επίσης, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών έχουμε ότι κάθε διάστημα $[s_n, t_n)$ περιέχει το επόμενο διάστημα $[s_{n+1}, t_{n+1})$, οπότε αυτά τα διαστήματα είναι εγκιβωτισμένα. Παρατηρούμε ότι

$$t_n - s_n = \frac{1}{10^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον x. Πράγματι, ισχύει

$$0 \leq x - s_n < t_n - s_n$$

για κάθε n και από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται

$$s_n \to x.$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και $t_n \to x$.

Τώρα, όμως, συνειδητοποιούμε ότι το $s_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}$ δεν είναι παρά το n-οστό μερικό άθροισμα της δεκαδικής σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$. Επομένως, το ότι $s_n \to x$ σημαίνει ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι ο x. Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = x.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε αριθμό στο $[0, 1)$ υπάρχει μια δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός.

Αν είναι κάποιος προσεκτικός, θα παρατηρήσει ότι στην απόδειξη που κάναμε αφήσαμε ένα σκοτεινό σημείο. Είναι φανερό ότι οι αριθμοί x_n που προέκυψαν από την επαγωγική διαδικασία της απόδειξης ανήκουν όλοι στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, 9\}$, αλλά για να τους χαρακτηρίσουμε *ακολουθία δεκαδικών ψηφίων* πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι δεν είναι τελικά ίσοι με 9. Αυτό το παραλείψαμε, αλλά αν θέλει κάποιος μπορεί να το διαβάσει στις ενότητες 2.4 και 8.2 του βιβλίου (όπου όλη η διαδικασία γίνεται κάπως πιο γενικά, θεωρώντας αντί του αριθμού 10 έναν φυσικό $p > 2$ και αντί των δεκαδικών ψηφίων $0, 1, \ldots, 9$ τα p-αδικά ψηφία $0, 1, \ldots, p-1$).

Είναι προφανές ότι μια δεκαδική σειρά έχει ως άθροισμα έναν *μοναδικό* αριθμό. Μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε ότι ισχύει και το ανάποδο: για κάθε αριθμό στο $[0, 1)$ υπάρχει *μοναδική* δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός. Την απόδειξη της μοναδικότητας της δεκαδικής σειράς μπορεί όποιος θέλει να την διαβάσει στο βιβλίο (και να δει ότι στην απόδειξη της μοναδικότητας παίζει ουσιαστικό ρόλο το ότι τα δεκαδικά ψηφία δεν είναι τελικά 9).

Η δεκαδική σειρά η οποία αντιστοιχεί σε έναν αριθμό x στο $[0, 1)$ ώστε να ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

ονομάζεται **δεκαδικό ανάπτυγμα** του x και χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το γνωστό από το δημοτικό σύμβολο $0.x_1x_2x_3\ldots$ για την δεκαδική σειρά. Οπότε η τελευταία σχέση ανάμεσα στον αριθμό x και στο δεκαδικό του ανάπτυγμα γράφεται και

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο* $[0, 1)$ *και στις ακολουθίες δεκαδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, ανάμεσα στους αριθμούς στο* $[0, 1)$ *και στα δεκαδικά αναπτύγματα* $0.x_1x_2x_3\ \ldots$.

Άσκηση 8.2.2. *Μελετήστε ως προς την σύγκλιση την σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big).$$

Λύση: Για να δούμε αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0, γράφουμε

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(n^2+1) - n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \to 0.$$

Από τον ίδιο τύπο βλέπουμε ότι ο n-οστός όρος συμπεριφέρεται όπως ο $\frac{1}{\sqrt{n^2}+n} = \frac{1}{2n}$. Επομένως, θα συσχετίσουμε την αρχική σειρά με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και χρησιμοποιούμε τον λόγο των n-οστών όρων τους.

$$\frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή

$$0 < \frac{1}{2} < +\infty,$$

οι σειρές είτε και οι δύο συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sqrt{n^2+1} - n\big) = +\infty.$$

Άσκηση 8.2.3. *Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου* a *για τις οποίες η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

συγκλίνει.

Λύση: Αν συμβολίσουμε x_n τον n-οστό όρο της σειράς, βλέπουμε ότι

$$x_n = n^a \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) = n^a\, \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

Άρα ο x_n είναι περίπου ίσος με τον

$$y_n = \frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n})} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}-a}}.$$

Για τον λόγο των x_n και y_n έχουμε ότι

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\, 2n^{\frac{3}{2}-a} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\big(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\big)} \to 1.$$

Επειδή
$$0 < 1 < +\infty,$$
η αρχική σειρά και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο σε σχέση με την σύγκλιση. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-a}} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } \frac{3}{2} - a > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } \frac{3}{2} - a \leq 1 \end{cases}$$

Άρα η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $a < \frac{1}{2}$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $a \geq \frac{1}{2}$.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 8.2.5. *Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις σειρές:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

Λύση: Στην πρώτη σειρά η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f\ :\ [1,+\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u^2+1}.$$

Η f είναι φθίνουσα και οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους προσθετέους της σειράς, οπότε εξετάζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{t\to+\infty}(\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{4} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} < +\infty.$$

Στην ίδια σειρά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και το κριτήριο σύγκρισης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Όμως, στις επόμενες δυο σειρές αυτό δεν είναι τόσο εύκολο και το πιο απλό είναι να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο.
Και στις δυο σειρές η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Για την δεύτερη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2,+\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u\log u}$$

και εξετάζουμε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{u\log u}\,du &= \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{u\log u}\,du = \lim_{t\to+\infty}\int_{\log 2}^{\log t} \frac{1}{y}\,dy \\ &= \lim_{t\to+\infty}\big(\log(\log t) - \log(\log 2)\big) = +\infty.\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty.$$

Για την τρίτη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2,+\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u(\log u)^2}$$

και μελετάμε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{u(\log u)^2}\,du = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{u(\log u)^2}\,du = \lim_{t\to+\infty}\int_{\log 2}^{\log t}\frac{1}{y^2}\,dy$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\Big(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log t}\Big) = \frac{1}{\log 2} < +\infty.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty.$$

Σχόλιο: Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^p},$$

όπου p είναι μια παράμετρος. Δοκιμάστε το. (Κατ' αρχάς θα πρέπει να διακρίνετε τις περιπτώσεις $p\le 0$ και $p>0$.)

Άσκηση 8.2.2. *Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε τις*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\Big(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{e}-1), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{1}{n}\Big).$$

Λύση: Στην πρώτη σειρά ο n-οστός όρος είναι στη μορφή

$$\log(1+x)$$

όπου ο $x=\frac{1}{n\sqrt{n}}$ είναι ένας μικρός αριθμός ο οποίος τείνει στο 0.
Τώρα θυμόμαστε ένα όριο από τον απειροστικό λογισμό:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Επομένως,

$$\frac{\log(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \to 1$$

και, επειδή $0<1<+\infty$, η σειρά μας και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty,$$

(διότι $\frac{3}{2}>1$) συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\Big(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) < +\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο χειριζόμαστε και τις άλλες δυο σειρές. Για την δεύτερη σειρά έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}e^x = 1,$$

οπότε
$$\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to 1.$$
Άρα η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{e}-1) = +\infty.$$
Για την τρίτη σειρά έχουμε το όριο
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2},$$
οπότε
$$\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2}.$$
Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) < +\infty.$$
Σχόλιο: Τα τρία προηγούμενα όρια, ακόμη κι αν κάποιος δεν τα θυμάται, μπορεί να του έρθουν στο μυαλό αν σκεφτεί τις παρακάτω πολύ γνωστές σειρές Taylor:
$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.\end{aligned}$$
Όταν ο x είναι πολύ κοντά στο 0, οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 είναι "αμελητέες" σε σχέση με το x, διότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^a}{x} = \lim_{x\to 0}x^{a-1} = 0 \qquad \text{όταν } a > 1.$$
Ομοίως, και οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2 είναι "αμελητέες" σε σχέση με το x^2 όταν ο x είναι πολύ κοντά στο 0.
Άρα, παραλείποντας στις δυο πρώτες ισότητες τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 και στην τρίτη ισότητα τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2, έχουμε, αντιστοίχως,
$$\begin{aligned}\log(1+x) &\sim x\\ e^x - 1 &\sim x\\ 1-\cos x &\sim \frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

για x κοντά στο 0.

Τώρα θα αφήσουμε την ειδική περίπτωση των σειρών με μη-αρνητικούς προσθετέους και θα πάμε να δούμε μερικά κριτήρια σύγκλισης σειρών στην γενική περίπτωση.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n_0 \leq m < n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς με τον γνωστό τύπο

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy, το οποίο είναι εξ ορισμού ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n_0 \leq m < n$.
Και η απόδειξη τελειώνει αν σκεφτούμε ότι

$$s_n - s_m = (x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m) = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n$$

όταν $m < n$. $\square$

Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ είναι σειρά με μη-αρνητικούς προσθετέους, γνωρίζουμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

συγκλίνει. Όμως δεν συγκλίνει απολύτως. Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Δεν θα παρουσιάσω την απόδειξη. Διαβάστε την στο βιβλίο.

Έχουμε, δηλαδή, την συνεπαγωγή

$$\text{απόλυτη σύγκλιση σειράς} \quad \Rightarrow \quad \text{σύγκλιση σειράς}$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Άρα *δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $|x_n| \leq y_n$ για κάθε n. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης, είναι*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Από προηγούμενη Πρόταση για σειρές με μη-αρνητικούς προσθετέους και από το Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, και

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ είναι φραγμένη (ή, ειδικώτερα, ότι συγκλίνει). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια μιας προηγούμενης Πρότασης για σειρές με μη-αρνητικούς προσθετέους και του Κριτηρίου Απόλυτης Σύγκλισης. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}.$$

Βλέπουμε ότι η απόλυτη τιμή του n-οστού προσθετέου της σειράς είναι

$$\Big|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}\Big| = \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}$$

και συμπεριφέρεται όπως ο λόγος $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.
Τώρα, βρίσκουμε ότι

$$\frac{|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{(n+1)n^2}{n^3+2n^2+4} \to 1.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η αρχική μας σειρά συγκλίνει απολύτως.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n.*

(i) Αν $\overline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $1 < \underline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $\underline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΡΙΖΑΣ. *(i) Αν $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.*

(ii) Αν $1 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a τέτοιον ώστε

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < a < 1.$$

Επειδή $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < a$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$. Δηλαδή υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ ή, ισοδύναμα,

$$|x_n| \leq a^n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.

(ii) Επειδή $1 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $1 \leq \sqrt[n]{|x_n|}$ ή, ισοδύναμα,

$$1 \leq |x_n|$$

για άπειρους n. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

(iii) Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Με $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

και, επομένως, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.
Ομοίως, με $x_n = \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$$

και, επομένως, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.
Δηλαδή, έχουμε δυο σειρές που η μια αποκλίνει και η άλλη συγκλίνει παρά το ότι και για τις δυο σειρές ισχύει $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$. □

Δεν θα αποδείξουμε το κριτήριο λόγου. Η απόδειξή του είναι παρόμοια με την απόδειξη του κριτηρίου ρίζας αλλά λίγο πιο τεχνική.

Στην εφαρμογή των κριτηρίων λόγου και ρίζας σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Τότε, όπως γνωρίζουμε είναι $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Θα εφαρμόσουμε πρώτα το κριτήριο λόγου.
Αν $a=0$, η σειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ και, προφανώς, συγκλίνει απολύτως.
Αν $a \neq 0$, τότε με

$$x_n = \frac{a^n}{n}$$

έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}\right| = |a| \frac{n}{n+1} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε μελετάμε τις σειρές που προκύπτουν σ'αυτήν την περίπτωση ανεξάρτητα από το κριτήριο λόγου.
Αν $a=1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.
Αν $a=-1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει (αλλά όχι απολύτως).
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n}} \to |a|.$$

Από εδώ και πέρα τα συμπεράσματα είναι τα ίδια με τα συμπεράσματα του κριτηρίου λόγου.
Και με τα δυο κριτήρια, λοιπόν, καταλήγουμε στο ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.

Παράδειγμα. Στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots$$

εφαρμόζουμε κατ'αρχάς το κριτήριο λόγου.
Αν $a=0$, η σειρά είναι η $1+0+0+\cdots$ και συγκλίνει απολύτως.
Αν $a \neq 0$, τότε με

$$x_n = \frac{a^n}{n!}$$

έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.
Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1,$$

διότι μπορεί να αποδειχθεί ότι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Αυτό το τελευταίο όριο δεν είναι τόσο εύκολο και δεν θα το αποδείξω εδώ. Μπορείτε να το διαβάσετε στο βιβλίο.
Άρα και με το κριτήριο ρίζας συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε a.

Υπάρχει μια “άτυπη αρχή” που λέει ότι όταν ο n-οστός όρος μιας σειράς περιέχει παραγοντικά τότε συνήθως η εφαρμογή του κριτηρίου λόγου είναι πιο εύκολη από το κριτήριο ρίζας. Αυτό το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου ο υπολογισμός του ορίου που προκύπτει από το κριτήριο λόγου είναι πιο εύκολος από τον υπολογισμό του ορίου που προκύπτει από το κριτήριο ρίζας.

Παράδειγμα. Τώρα θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{a^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} - \cdots .$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτήν την σειρά στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n,$$

όπου ο n-οστός προσθετέος έχει τύπο

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{a^n}{n!}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, διότι υπάρχουν (άπειροι) προσθετέοι ίσοι με 0.
Για το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το όριο $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, βλέπουμε ότι η υποακολουθία των άρτιων δεικτών της $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ συγκλίνει στο 0. Η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει κι αυτή στο 0, οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.

Παράδειγμα. Τέλος, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{2k-1}}{2k-1} = a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \frac{a^7}{7} + \cdots .$$

Κι αυτήν την σειρά μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n,$$

όπου ο n-οστός προσθετέος έχει τύπο

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{a^n}{n}, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Πάλι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, διότι υπάρχουν (άπειροι) προσθετέοι ίσοι με 0.
Για το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{|a|}{\sqrt[n]{n}}, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Τώρα, η υποακολουθία των άρτιων δεικτών της $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ συγκλίνει στο 0 και η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στο $|a|$. Επειδή $0 \leq |a|$, συνεπάγεται ότι

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = |a|.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|a| < 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.
Την περίπτωση $|a| = 1$ την εξετάζουμε ανεξάρτητα από το κριτήριο ρίζας.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Με ένα απλό κόλπο *σύγκρισης* θα αναγάγουμε αυτήν την σειρά στην αρμονική σειρά:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\Big) = +\infty.$$

(Αυξάνουμε κάθε παρονομαστή της αρχικής σειράς κατά 1.)
Άρα η σειρά αποκλίνει όταν $a = 1$.
Το ίδιο ισχύει για $a = -1$, διότι τότε η σειρά είναι η

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots = -\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\Big) = -\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως) αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Εκτός από το κριτήριο του Cauchy, όλα τα άλλα κριτήρια σύγκλισης μιας σειράς που είδαμε μέχρι τώρα (απόλυτης σύγκλισης, σύγκρισης δυο σειρών, λόγου, ρίζας) χρησιμεύουν για να αποδείξουν ότι μια σειρά *συγκλίνει απολύτως* και, επομένως, συγκλίνει. Με άλλα λόγια, αν αντιμετωπίζουμε μια σειρά η οποία *δεν συγκλίνει απολύτως* (και δεν το γνωρίζουμε), τότε τα κριτήρια αυτά δεν θα βοηθήσουν διότι θα αποδεικνύουν ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως. Υπάρχει, όμως, περίπτωση η σειρά να συγκλίνει παρά το ότι δεν συγκλίνει απολύτως. Δηλαδή, αν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, κανένα από αυτά τα κριτήρια δεν θα μας πει ότι η σειρά συγκλίνει.

Υπάρχουν, όμως, τα επόμενα δυο κριτήρια ειδικά για σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ DIRICHLET. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα, αν $b_n \to 0$ και αν η (s_n) είναι φραγμένη, τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

συγκλίνει.

Δεν θα αποδείξω το κριτήριο του Dirichlet. Επίσης, δεν θα αναφέρω το κριτήριο του Abel, παρόμοιο με το κριτήριο του Dirichlet. Όλα αυτά μπορείτε να τα διαβάσετε στο βιβλίο. Θα αποδείξω, όμως, το επόμενο χρήσιμο πόρισμα του κριτηρίου του Dirichlet.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ. *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$, τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Dirichlet χρησιμοποιώντας την ακολουθία (a_n) με τύπο

$$a_n = (-1)^{n-1}.$$

Τότε τα μερικά αθροίσματα της (a_n) είναι

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

και γενικά

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_n) είναι φραγμένη, οπότε βάσει του κριτηρίου του Dirichlet η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει. $\square$

Παράδειγμα. Τυπικά παραδείγματα είναι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

Αν $p \leq 0$, ο n-οστός προσθετέος δεν τείνει στο 0, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $0 < p$, η ακολουθία με n-οστό όρο $b_n = \frac{1}{n^p}$ είναι προφανώς φθίνουσα και τείνει στο 0. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά συγκλίνει.
Από την άλλη μεριά, για να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση της σειράς πρέπει να θεωρήσουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή αποκλίνει αν $p \leq 1$ και συγκλίνει αν $1 < p$.
Άρα το συμπέρασμα είναι ότι

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \begin{cases} \text{αποκλίνει,} & \text{αν } p \leq 0 \\ \text{συγκλίνει υπό συνθήκη,} & \text{αν } 0 < p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει απολύτως,} & \text{αν } 1 < p \end{cases}$$

Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots .$$

συγκλίνει υπό συνθήκη.

Άσκηση 8.3.1. *Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου στις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n (n+1)!}{n^n}.$$

Λύση: Για την πρώτη σειρά γράφουμε τον n-οστό όρο και τον επόμενό του:

$$x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}, \qquad x_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)}.$$

Επομένως,

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως).
Ομοίως, για την δεύτερη σειρά με

$$x_n = \frac{e^n (n+1)!}{n^n}, \qquad x_{n+1} = \frac{e^{n+1}(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$$

έχουμε

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = e\,\frac{(n+2)!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} = e\,\frac{(n+2)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = e\,\frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to e{\cdot}1{\cdot}\frac{1}{e} = 1.$$

Άρα το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

Άσκηση 8.3.2. *Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας στις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}.$$

Λύση: Για την πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|n^2|} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1,$$

οπότε το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Βέβαια, μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Για τη δεύτερη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Άρα αυτή η σειρά συγκλίνει (απολύτως).

Άσκηση 8.3.4. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \log n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\log n)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}.$$

Λύση: Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n \log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty.$$

Όμως, η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων, διότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.

Σχόλιο: Αν δεν μας ζητούσαν να εξετάσουμε τη σειρά ως προς την απόλυτη σύγκλιση, τότε θα εφαρμόζαμε χωρίς χρονοτριβή το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων και θα βλέπαμε αμέσως ότι η σειρά συγκλίνει. Από την άλλη μεριά, αν φαίνεται αμέσως ότι μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε δεν χάνουμε τίποτα να πούμε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως και, επομένως, ότι συγκλίνει. Βέβαια, για την συγκεκριμένη σειρά καθώς και για την επόμενη δεν είναι εύκολο να αποφασίσουμε αμέσως για την απόλυτη σύγκλισή τους. Αυτό είχε γίνει σε προηγούμενη άσκηση μέσω του ολοκληρωτικού κριτηρίου.

Η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως, διότι (πάλι από προηγούμενη άσκηση)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(\log n)^2}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει. Αυτό το τελευταίο φαίνεται και ανεξάρτητα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. Σύμφωνα με το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων η σειρά

συγκλίνει, διότι η ακολουθία $(\frac{1}{n(\log n)^2})$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.
Η τρίτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι από προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n} = +\infty.$$

Η σειρά όμως συγκλίνει, διότι η ακολουθία $(\sin\frac{1}{n})$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0. Το ότι είναι φθίνουσα ισχύει διότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι αριθμοί $\frac{1}{n}$. Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}.$$

Άσκηση 8.3.5. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση την σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2+(-1)^n)n}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής $2+(-1)^n$ του n στον παρονομαστή του n-οστού όρου είναι ίσος με 1 όταν ο n είναι περιττός και ίσος με 3 αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή η σειρά γράφεται

$$\frac{1}{1\cdot 1}-\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 8}+\cdots.$$

Κατ' αρχάς η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως. Ο πιο απλός τρόπος να το δούμε είναι να συγκρίνουμε την σειρά με τα απόλυτα με την αρμονική σειρά, μικραίνοντας τους προσθετέους: κάθε παρονομαστής είναι n ή $3n$ και είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από $3n$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(2+(-1)^n)n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2+(-1)^n)n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα, για να εφαρμόσουμε το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων στην σειρά πρέπει να δούμε αν η ακολουθία με n-οστό όρο

$$b_n = \frac{1}{(2+(-1)^n)n}$$

είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.
Το ότι η ακολουθία τείνει στο 0 είναι εύκολο να το δούμε: πάλι, επειδή κάθε παρονομαστής είναι n ή $3n$, έχουμε

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

και, επομένως, $b_n \to 0$.
Όμως, η ακολουθία *δεν* είναι (τελικά) φθίνουσα. Αυτό το υποψιαζόμαστε από τους αρχικούς όρους και το βλέπουμε παρατηρώντας τρεις διαδοχικούς όρους:

$$b_{2k} < b_{2k+1} > b_{2k+2}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\frac{1}{6k} < \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{6k+6}.$$

Άρα δεν εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.
Τώρα, αποδεικνύεται ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$. *Μπορείτε να το αποδείξετε;*

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα μπαίνουμε στο κεφάλαιο για τα όρια συναρτήσεων. Εδώ θα κάνουμε μια σχετικά σύντομη επισκόπηση της έννοιας του ορίου συνάρτησης, τονίζοντας απλώς κάποια "λεπτά" σημεία, διότι η έννοια αυτή έχει διδαχθεί σε προηγούμενο μάθημα απειροστικού λογισμού. Για διεξοδικότερη διαπραγμάτευση με όλες τις λεπτομέρειες και με πολλά παραδείγματα δείτε τις ενότητες 3.1 και 3.2 του βιβλίου.

Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f\,:\,A\to\mathbb{R}$$

όπου το πεδίο ορισμού A της f είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$$

όταν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο κατάλληλο $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ με $0<|x-\xi|<\delta$. Με άλλα λόγια, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$x\in A, 0<|x-\xi|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-\eta|<\epsilon. \tag{2}$$

Όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν ισχύει το παραπάνω όριο, παίρνουμε έναν τυχόντα $\epsilon>0$ και προσπαθούμε να βρούμε έναν κατάλληλο $\delta>0$ ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

$$|f(x)-\eta|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad \cdots \quad \Leftarrow \quad \cdots\cdots \quad \Leftarrow \quad \cdots \quad \Leftarrow \quad 0<|x-\xi|<\delta.$$

Αρχίζουμε δηλαδή από την σχέση $|f(x)-\eta|<\epsilon$, που θέλουμε να ισχύει, και μεταβαίνουμε σε απλούστερες σχέσεις, προσέχοντας ώστε κάθε επόμενη σχέση να συνεπάγεται την προηγούμενη, και καταλήγοντας στην τελική σχέση $0<|x-\xi|<\delta$. Σε κάθε στάδιο της διαδικασίας πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού A της f. Αυτή είναι η διαδικασία που ακολουθούσαμε στην περίπτωση του ορίου ακολουθίας, όπου από τον τυχόντα $\epsilon>0$ βρίσκαμε έναν κατάλληλο n_0.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε το όριο

$$\lim_{x\to 1}(3x+4)=7.$$

Έστω $\epsilon>0$. Πρέπει να βρούμε έναν κατάλληλο $\delta>0$ ώστε

$$0<|x-1|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |(3x+4)-7|<\epsilon.$$

Κάνουμε το εξής:

$$|(3x+4)-7|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad |3x-3|<\epsilon \quad \Leftarrow \quad |x-1|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Οπότε αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0<\delta\le\frac{\epsilon}{3},$$

τότε θα έχουμε ότι

$$0<|x-1|<\delta \quad \Rightarrow \quad |x-1|<\frac{\epsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad |3x-3|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad |(3x+4)-7|<\epsilon$$

ή, πιο σύντομα,

$$0<|x-1|<\delta \qquad \Rightarrow \qquad |(3x+4)-7|<\epsilon.$$

Ο ορισμός του ορίου

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$$

είναι ανάλογος: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο κατάλληλο $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$. Ισοδύναμα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N > 0$ ώστε

$$x \in A, x > N \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \epsilon. \tag{3}$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε το N από το ϵ είναι εντελώς ανάλογη της προηγούμενης (για να βρούμε το δ από το ϵ).

Υπάρχουν εννέα περιπτώσεις ορίου, ανάλογα με το αν το x τείνει σε αριθμό ξ ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και αν το όριο του $f(x)$ είναι αριθμός η ή $+\infty$ ή $-\infty$. Όσον αφορά στο x οι αντίστοιχες ανισότητες είναι $0 < |x - \xi| < \delta$ ή $x > N$ ή $x < -N$ και όσον αφορά στο $f(x)$ οι αντίστοιχες ανισότητες είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ ή $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$. Κάθε φορά θεωρούμε δεδομένο τον τυχόντα $\epsilon > 0$ ή τον $M > 0$ και ψάχνουμε να βρούμε τον κατάλληλο $\delta > 0$ ή τον $N > 0$ ώστε να ισχύει μια συνεπαγωγή όπως οι παραπάνω (2) και (3).

Τώρα θα τονίσω ότι, όπως και στην περίπτωση του ορίου ακολουθίας, μπορούμε να διατυπώσουμε με την ίδια ενιαία μορφή τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις *περιοχές* των σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$. Θυμόμαστε ότι οι περιοχές των σημείων $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι οι

$$N_\eta(\epsilon) = \begin{cases} (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon), & \text{αν } \eta \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{\epsilon}, +\infty], & \text{αν } \eta = +\infty \\ [-\infty, -\frac{1}{\epsilon}), & \text{αν } \eta = -\infty \end{cases}$$

$$N_\xi(\delta) = \begin{cases} (\xi - \delta, \xi + \delta), & \text{αν } \xi \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{\delta}, +\infty], & \text{αν } \xi = +\infty \\ [-\infty, -\frac{1}{\delta}), & \text{αν } \xi = -\infty \end{cases}$$

Συνηθίζουμε να γράφουμε $M = \frac{1}{\epsilon}$ και $N = \frac{1}{\delta}$, οπότε το να είναι οι M, N μεγάλοι ισοδυναμεί με το να είναι οι αντίστοιχοι ϵ, δ μικροί.

Τώρα η ενιαία διατύπωση του ορισμού του ορίου

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$$

είναι: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, x \in N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \in N_\eta(\epsilon).$$

Και τώρα ερχόμαστε να θίξουμε ένα λεπτό σημείο της έννοιας του ορίου.

Το όριο

$$\lim_{x\to-1} \sqrt{x}$$

δεν έχει νόημα. Ο λόγος είναι ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt{x}$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$ και το x, το οποίο είναι υποχρεωμένο να βρίσκεται μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δεν μπορεί να πλησιάσει τον αριθμό -1. Πράγματι, υπάρχει κάποια περιοχή του -1 η οποία δεν περιέχει κανένα x από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για να έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x\to\xi} \sqrt{x}$$

πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ κινούμενος μέσα στο πεδίο ορισμού της $\sqrt{x}$. Είναι προφανές ότι αυτό μπορεί να γίνει αν το ξ είναι οποιοδήποτε σημείο του $[0,+\infty]$ (συμπεριλαμβανομένου του $+\infty$) και ότι δεν μπορεί να γίνει αν ο ξ είναι στο $[-\infty,0)$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το όριο

$$\lim_{x\to\xi}\sqrt{x(x-1)}.$$

Τώρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ και για να έχει νόημα το όριο πρέπει ο ξ να βρίσκεται στην ένωση $[-\infty,0]\cup[1,+\infty]$. Αν ο ξ ανήκει στο διάστημα $(0,1)$, το όριο δεν έχει νόημα.

Άλλο παράδειγμα είναι το

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ και για να έχει νόημα το όριο πρέπει ο ξ να βρίσκεται, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, στην ένωση $[-\infty,0]\cup[1,+\infty]$. Αν ο ξ ανήκει στο διάστημα $(0,1)$, το όριο δεν έχει νόημα.

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ πρέπει ο x να μπορεί να πλησιάσει το ξ κινούμενος μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και, επομένως, πρέπει ο ξ να βρίσκεται σε κατάλληλη θέση σε σχέση με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Όπως είδαμε στα συγκεκριμένα παραδείγματα, όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι μια ένωση πεπερασμένων διαστημάτων, τότε οι επιτρεπτές θέσεις του ξ είναι στην ένωση των ίδιων διαστημάτων αφού επισυνάψουμε σ' αυτά και τα άκρα τους.

Ας δούμε, όμως, και ένα λίγο πιο περίπλοκο παράδειγμα. Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x\sin\frac{1}{x}}.$$

Έχει νόημα αυτό το όριο; Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης λύνουμε την ανίσωση

$$x\sin\frac{1}{x}\geq 0$$

και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι μια ένωση άπειρων διαστημάτων:

$$A=\Big(-\infty,-\frac{1}{\pi}\Big]\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[-\frac{1}{2n\pi},-\frac{1}{(2n+1)\pi}\Big]\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\Big]\cup\Big[\frac{1}{\pi},+\infty\Big).$$

Το σύνολο A βρίσκεται και στις δυο μεριές του 0 και αποτελείται από άπειρα συμμετρικά ως προς το 0 διαστήματα τα οποία προσεγγίζουν το 0. Δηλαδή, ο x μπορεί να πλησιάσει το 0 μέσα από το A και, επομένως, έχει νόημα το συγκεκριμένο όριο. Λίγο πιο μετά θα δούμε πολύ εύκολα ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0. Παρατηρήστε ότι εκτός από τα άπειρα διαστήματα στα οποία είναι ορισμένη η συνάρτηση $\sqrt{x\sin\frac{1}{x}}$, *υπάρχουν και άπειρα άλλα συμπληρωματικά διαστήματα και στις δυο μεριές του* 0 *τα οποία επίσης προσεγγίζουν το* 0 *και στα οποία δεν είναι ορισμένη η συνάρτηση. Τα διαστήματα ορισμού και τα διαστήματα μη-ορισμού της συνάρτησης εναλλάσσονται διαρκώς πλησιάζοντας το* 0 *και από τις δυο μεριές του και, επομένως, δεν υπάρχει κανένα διάστημα με άκρο τον* 0*, είτε δεξιά είτε αριστερά του* 0*, στο οποίο να είναι ορισμένη η συνάρτηση.*

Τέλος, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όταν αναφερόμαστε στο όριο $\lim_{x\to\xi}f(x)$ εννοούμε ότι ο x πλησιάζει το ξ αλλά δεν επιτρέπεται να γίνει ακριβώς ίσος με ξ.

Αυτό φαίνεται και στην ανισότητα $0 < |x - \xi| < \delta$ που αναφέρεται στον ορισμό του ορίου. Άρα πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ μέσα από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά, στην περίπτωση που το ίδιο το ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού, πρέπει να μπορεί ο x να πλησιάσει το ξ αποφεύγοντας να συμπέσει με το ξ.

Για παράδειγμα, το όριο
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2(x-1)}$$
δεν έχει νόημα. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι η ένωση $\{0\} \cup [1, +\infty)$ και από τη στιγμή που ο x πρέπει να κινείται μέσα στο πεδίο ορισμού και να αποφεύγει να συμπέσει με το 0 είναι υποχρεωμένος να πλησιάσει το 0 μέσα από το $[1, +\infty)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο. Εδώ το πρόβλημα είναι ότι υπάρχει μια περιοχή του 0 η οποία περιέχει μόνο το ίδιο το 0 από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Και τώρα θα κωδικοποιήσουμε με έναν ορισμό τις περιπτώσεις που έχει νόημα το $\lim_{x \to \xi} f(x)$.

Λέμε ότι το ξ είναι **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν *κάθε* περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A διαφορετικό από το ίδιο το ξ. Με απλοϊκά λόγια, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν μπορούμε να πλησιάσουμε το ξ με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Με σύμβολα:
$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{ώστε} \quad x \in N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\}.$$

Δηλαδή, σύμφωνα με όσα είπαμε μέχρι τώρα, το όριο $\lim_{x \to \xi} f(x)$ έχει νόημα ακριβώς όταν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Όπως είδαμε στο τελευταίο παράδειγμα, υπάρχει περίπτωση να ανήκει το ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης αλλά να μην μπορούμε να το πλησιάσουμε με σημεία x του πεδίου ορισμού διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Αυτή η περίπτωση συμβαίνει όταν το ξ είναι *μεμονωμένο σημείο* του πεδίου ορισμού.

Γενικότερα, λέμε ότι το ξ είναι **μεμονωμένο σημείο** του συνόλου A αν *υπάρχει* μια περιοχή του ξ η οποία περιέχει μόνο το στοιχείο ξ από το A.

Για παράδειγμα, το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του $\{0\} \cup [1, +\infty)$.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Είδαμε στο προηγούμενο μάθημα ότι για να έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x\to\xi} f(x)$$

πρέπει το ξ να είναι σε κατάλληλη θέση σε σχέση με το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. Δηλαδή πρέπει το ξ να μπορεί να προσεγγισθεί από στοιχεία x του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Αυτό το εκφράζουμε με μαθηματικό τρόπο, λέγοντας ότι το ξ πρέπει να είναι σημείο συσσώρευσης του A: σε κάθε περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, πρέπει να υπάρχουν στοιχεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Όταν λέμε περιοχή του ξ εννοούμε διάστημα $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ αν $\xi\in\mathbb{R}$, διάστημα $(M,+\infty]$ αν $\xi=+\infty$ και διάστημα $[-\infty,-M)$ αν $\xi=-\infty$.

Ανάλογα μπορούμε να σκεφτούμε για τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ στο σημείο $\xi\in\mathbb{R}$, δηλαδή τα

$$\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\xi+} f(x)=\eta.$$

Το $\lim_{x\to\xi+} f(x)=\eta$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$x\in A, \xi<x<\xi+\delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-\eta|<\epsilon.$$

Και το $\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$x\in A, \xi-\delta<x<\xi \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-\eta|<\epsilon.$$

Σ' αυτά τα όρια παίζουν ρόλο οι λεγόμενες **πλευρικές περιοχές**

$$N_{\xi-}(\delta)=(\xi-\delta,\xi], \qquad N_{\xi+}(\delta)=[\xi,\xi+\delta).$$

Και, ανάλογα, για να έχουν νόημα αυτά τα δυο όρια πρέπει το ξ να είναι από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή, για να έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ πρέπει να μπορεί να προσεγγισθεί το ξ από αριστερά του με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Και για να έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ πρέπει να μπορεί να προσεγγισθεί το ξ από δεξιά του με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ.

Και για να μην γίνει παρανόηση: το ξ πρέπει να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f για να έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Όμως, *το να έχει νόημα το όριο δεν συνεπάγεται ότι το όριο υπάρχει.* Για παράδειγμα, το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{x}$, δηλαδή της ένωσης $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, και επομένως έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά είναι διαφορετικά:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Παρατηρήστε ότι το 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, οπότε έχουν νόημα και τα δυο πλευρικά όρια.

Για να μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα κάποιες ιδιότητες των ορίων, θα ορίσουμε τώρα κάποιες απλές σχετικές έννοιες.

Ας υποθέσουμε ότι μιλάμε για κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα η οποία έχει νόημα σε ένα σύνολο A και είναι αληθής για κάποια $x \in A$ και ψευδής για τα υπόλοιπα $x \in A$. Για παράδειγμα η ανισότητα $\sqrt{x} > 1$ έχει νόημα στο σύνολο $A = [0, +\infty)$, είναι αληθής για $x \in (1, +\infty)$ και ψευδής για $x \in [0, 1]$. Όταν μια ιδιότητα αναφέρεται σε μια συνάρτηση f τότε το σύνολο στο οποίο έχει νόημα είναι το πεδίο ορισμού της f.

Όταν λέμε ότι η ιδιότητα (που έχει νόημα στο σύνολο A) **ισχύει κοντά** στο ξ εννοούμε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και ότι η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A$ που ανήκει σε κάποια περιοχή του ξ και είναι διαφορετικό από το ίδιο το ξ.

Όταν λέμε ότι η ιδιότητα (που έχει νόημα στο σύνολο A) **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά** στο ξ εννοούμε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και ότι σε κάθε περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον ένα $x \in A$ διαφορετικό από το ίδιο το ξ.

Για παράδειγμα, η ανισότητα

$$\frac{1}{x} > 3$$

έχει νόημα στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει στο διάστημα $(0, \frac{1}{3})$. Άρα είναι λάθος να πούμε ότι η ανισότητα ισχύει κοντά στο 0, διότι δεν υπάρχει καμία περιοχή $(-\delta, \delta)$ τέτοια ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap (-\delta, \delta)$. Βέβαια, μπορούμε να πούμε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει κοντά στο 0 από τα δεξιά του, διότι υπάρχει η δεξιά περιοχή $[0, \frac{1}{3})$ του 0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap [0, \frac{1}{3})$.

Τώρα, η ανισότητα

$$\frac{1}{|x|} > 3$$

έχει νόημα στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει στο $(-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$. Άρα η ανισότητα ισχύει κοντά στο 0, διότι υπάρχει η περιοχή $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ του 0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ανισότητα

$$\sin x > \frac{1}{2},$$

η οποία έχει νόημα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, η ανισότητα ισχύει για παράδειγμα στα σημεία $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και, επομένως, για κάθε $N > 0$, όσο θέλουμε μεγάλο, υπάρχει τουλάχιστον ένα x στο $(N, +\infty)$ για το οποίο η ανισότητα ισχύει. Από την άλλη μεριά είναι λάθος να πούμε ότι η ανισότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$, διότι δεν υπάρχει κανένα $N > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε x στο $(N, +\infty)$.

Τέλος, η ανισότητα

$$\frac{1}{x} < 0.0001$$

ισχύει για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (10000, +\infty)$ και επομένως ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Και τώρα θα αναφέρω μερικές μόνο ιδιότητες των ορίων. Δεν θα αναπτύξω συστηματικά τις ιδιότητες των ορίων, διότι υποθέτω ότι έχουν μελετηθεί σε προηγούμενο μάθημα απειροστικού λογισμού. Για να τις θυμηθείτε, διαβάστε προσεκτικά ολόκληρη την ενότητα 3.3 του βιβλίου μαζί με τα παραδείγματα που περιέχονται σ' αυτήν.

Μια ιδιότητα είναι η εξής. (Δείτε την Πρόταση 3.4 του βιβλίου.)

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *και* $\eta < u$*, τότε ισχύει* $f(x) < u$ *κοντά στο* ξ*.*

Για να αποδείξουμε αυτήν την ιδιότητα, θέτουμε $\epsilon = u - \eta > 0$ και θεωρούμε την περιοχή $(\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ η οποία, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του ϵ, βρίσκεται ολόκληρη αριστερά του u. Τώρα, επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει (για κάθε $\epsilon > 0$ και επομένως και) για τον συγκεκριμένο ϵ κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, x \in (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon) \quad \Rightarrow \quad f(x) < u.$$

Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.

Μια άλλη ιδιότητα είναι η εξής. (Δείτε την Πρόταση 3.6 του βιβλίου.)

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$*, τότε η* f *είναι φραγμένη κοντά στο* ξ*.*

Μια άλλη ιδιότητα είναι η **ιδιότητα παρεμβολής** (η Πρόταση 3.10 του βιβλίου):

Αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *κοντά στο* ξ *και αν υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *και* $\lim_{x\to\xi} h(x)$ *και είναι ίσα, τότε υπάρχει και το όριο* $\lim_{x\to\xi} g(x)$ *και είναι ίσο με τα δυο προηγούμενα όρια.*

Για παράδειγμα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το όριο στο 0 της συνάρτησης $\sqrt{x \sin\frac{1}{x}}$ την οποία συναντήσαμε στο προηγούμενο μάθημα και έχει, όπως είδαμε, ένα περίπλοκο πεδίο ορισμού. Βλέπουμε ότι ισχύει

$$0 \leq \sqrt{x \sin\frac{1}{x}} \leq \sqrt{|x|}$$

κοντά στο 0 και, επειδή $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ και $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x \sin\frac{1}{x}} = 0.$$

Και τώρα ερχόμαστε σε ένα σημαντικό Θεώρημα, το Θεώρημα 3.1 στο βιβλίο. *Το Θεώρημα αυτό "συσχετίζει" την έννοια του ορίου συνάρτησης με την έννοια του ορίου ακολουθίας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και σημείο συσσώρευσης* ξ *του* A*. Θεωρούμε όλες τις ακολουθίες* (x_n) *στο σύνολο* A *με τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) $x_n \neq \xi$ *για κάθε* n*,*
(ii) $x_n \to \xi$*.*
Τότε:
[α] *Αν* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$*, τότε για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* A *με τις ιδιότητες* (i), (ii) *ισχύει* $f(x_n) \to \eta$*.*
[β] *Αν για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* A *με τις ιδιότητες* (i), (ii) *η αντίστοιχη ακολουθία* $\big(f(x_n)\big)$ *έχει όριο, τότε υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to\xi} f(x)$*.*

Θα δούμε την απόδειξη στο επόμενο μάθημα. Ας δούμε όμως πώς εφαρμόζουμε το [α] του Θεωρήματος. Αυτό που κάνουμε είναι ότι, αν γνωρίζουμε το όριο κάποιας κατάλληλης συνάρτησης, βγάζουμε συμπέρασμα για το όριο ακολουθίας.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Αν τώρα έχουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $x_n \to 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι ${x_n}^2 \to 0$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εξής. Γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Αν πάρουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{n^2+3n+1}{2n^2+4}$, τότε έχουμε ότι ισχύει $x_n \neq \frac{1}{2}$ για κάθε n και $x_n \to \frac{1}{2}$. Άρα συνεπάγεται

$$e^{\frac{n^2+3n+1}{2n^2+4}} = e^{x_n} \to e^{\frac{1}{2}}.$$

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος που διατυπώσαμε στο τέλος του προηγούμενου μαθήματος.

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

Τώρα θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες
(i) $x_n \neq \xi$ για κάθε n
(ii) $x_n \to \xi$
και θα αποδείξουμε ότι

$$f(x_n) \to \eta.$$

Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta \in \mathbb{R}$. Οι άλλες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη.
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \epsilon. \tag{4}$$

Τώρα, επειδή η ιδιότητα (ii) λέει ότι $x_n \to \xi$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_n - \xi| < \delta.$$

Επίσης, από την ιδιότητα (i) έχουμε ότι ισχύει $0 < |x_n - \xi|$ για κάθε n και, επομένως, ισχύει τελικά

$$0 < |x_n - \xi| < \delta.$$

Άρα από την (4) συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|f(x_n) - \eta| < \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|f(x_n) - \eta| < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to \eta$.
Στην απόδειξη του [β] θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. *Έστω σύνολο A και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες*
(i) $x_n \neq \xi$ για κάθε n
(ii) $x_n \to \xi$.

Απόδειξη. Θα δούμε την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την περιοχή $(\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n})$ του ξ. Επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, συνεπάγεται ότι υπάρχει στην περιοχή αυτή σημείο x_n του A, διαφορετικό από το ξ. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n (δηλαδή η ιδιότητα (i)) και $\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $x_n \to \xi$ (δηλαδή η ιδιότητα (i)). $\square$

[β] Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) (που μόλις αποδείξαμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια ακολουθία) ισχύει ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ έχει κάποιο όριο.
Και πάλι θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$.
Θεωρούμε δυο ακολουθίες (x'_n) και (x''_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Σχηματίζουμε την "μικτή" ακολουθία

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, x'_4, x''_4, \; \dots \; .$$

Είναι φανερό ότι και αυτή η ακολουθία έχει τις ιδιότητες (i) και (ii). Πράγματι, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και συγκλίνει στο ξ, διότι οι υποακολουθίες της των περιττών δεικτών και των άρτιων δεικτών ταυτίζονται με τις (x'_n) και (x''_n), αντιστοίχως, οι οποίες συγκλίνουν στο ξ.
Λόγω της υπόθεσής μας, η αντίστοιχη ακολουθία

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), f(x'_3), f(x''_3), f(x'_4), f(x''_4), \; \dots$$

έχει όριο.
Άρα οι ακολουθίες $\big(f(x'_n)\big)$ και $\big(f(x''_n)\big)$ έχουν το ίδιο όριο, διότι είναι οι υποακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών της τελευταίας ακολουθίας.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) ισχύει ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ έχει κάποιο όριο και ότι *το όριο αυτό της* $\big(f(x_n)\big)$ *δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη* (x_n) *που θεωρούμε κάθε φορά.*
Ονομάζοντας η αυτό το κοινό όριο, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει κάποιο η το οποίο είναι το κοινό όριο όλων των $\big(f(x_n)\big)$ που προέρχονται από ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Δηλαδή, για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) συνεπάγεται

$$f(x_n) \to \eta.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta.$$

Περιοριζόμαστε πάλι στην περίπτωση όπου $\eta \in \mathbb{R}$.
Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο αντίστοιχο $x \in A$ για το οποίο ισχύει $0 < |x - \xi| < \delta$ αλλά δεν ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $|f(x) - \eta| \geq \epsilon$. Τώρα, με το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (με $\delta = \frac{1}{n}$) υπάρχει κάποιο αντίστοιχο x_n στο A για το οποίο ισχύει $0 < |x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - \eta| \geq \epsilon$.
Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) για την οποία ισχύει

$$|f(x_n) - \eta| \geq \epsilon$$

για κάθε n.
Τώρα, επειδή η (x_n) έχει τις ιδιότητες (i) και (ii), συνεπάγεται ότι πρέπει $f(x_n) \to \eta$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f(x_n) - \eta| \geq \epsilon$, αφού το ϵ είναι ένας θετικός αριθμός ανεξάρτητος του n. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Προσέξτε στην προηγούμενη απόδειξη του [β] την διατύπωση της άρνησης του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά.
Το ότι ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ σημαίνει ότι

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \qquad \big(\, 0 < |x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \epsilon \,\big)$$

Άρα το ότι *δεν* ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$ σημαίνει ότι

$$\exists\epsilon>0\quad\forall\delta>0\quad\exists x\in A\qquad\neg\big(\ 0<|x-\xi|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-\eta|<\epsilon\ \big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\exists\epsilon>0\quad\forall\delta>0\quad\exists x\in A\qquad\Big(\ 0<|x-\xi|<\delta\quad\wedge\quad\neg(\ |f(x)-\eta|<\epsilon\ )\ \Big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\exists\epsilon>0\quad\forall\delta>0\quad\exists x\in A\qquad\big(\ 0<|x-\xi|<\delta\quad\wedge\quad|f(x)-\eta|\geq\epsilon\ \big).$$

Προσέξτε. Το ότι ισχύει μια συνεπαγωγή σημαίνει ότι "*όταν* αληθεύει η υπόθεσή της *τότε* αληθεύει και το συμπέρασμά της". Επομένως, το ότι δεν ισχύει μια συνεπαγωγή σημαίνει ότι "αληθεύει η υπόθεσή της *και* δεν αληθεύει το συμπέρασμά της".

Ερχόμαστε τώρα και στο Θεώρημα 3.2 του βιβλίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και ξ το οποίο είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ, τότε το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ υπάρχει. Το όριο αυτό είναι αριθμός αν η f είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ και είναι $+\infty$ αν η f δεν είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο τιμών της f αριστερά του ξ, δηλαδή το

$$Y=\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}.$$

Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη αριστερά του ξ. Τότε το σύνολο τιμών Y είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, οπότε το

$$\eta=\sup Y=\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}$$

είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta.$$

Έστω $\epsilon>0$. Τότε $\eta-\epsilon<\eta$, οπότε από την δεύτερη ιδιότητα του supremum συνεπάγεται ότι υπάρχει στοιχείο του Y ανάμεσα στα $\eta-\epsilon$ και η. Δηλαδή υπάρχει $x_0\in A$ με $x_0<\xi$ ώστε

$$\eta-\epsilon<f(x_0).$$

Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ αλλά και επειδή το η είναι άνω φράγμα του Y, έχουμε ότι για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$\eta-\epsilon<f(x_0)\leq f(x)\leq\eta<\eta+\epsilon.$$

Δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$\eta-\epsilon<f(x)<\eta+\epsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta$.

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι η f είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη αριστερά του ξ. Τότε το Y είναι μη-κενό αλλά όχι άνω φραγμένο, οπότε

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}=\sup Y=+\infty.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του Y, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ με $x_0 < \xi$ ώστε

$$f(x_0) > M.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ, έχουμε ότι για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > M.$$

Άρα $\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$. □

Το Θεώρημα αυτό περιέχει και άλλες περιπτώσεις: για το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ όταν η f είναι φθίνουσα αριστερά του ξ καθώς και για το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ όταν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα δεξιά του ξ. Γι αυτές τις περιπτώσεις δείτε το Θεώρημα 3.2 στο βιβλίο.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

Θεωρούμε μια συνάρτηση
$$f\ :\ A \to \mathbb{R}$$
και ένα σημείο $\xi \in A$.

Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο ξ αν το $f(x)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στο $f(\xi)$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ ή, ισοδύναμα, αν η απόσταση $|f(x) - f(\xi)|$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή αρκεί η απόσταση $|x - \xi|$ να γίνει αρκετά μικρή ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x-\xi| < \delta$ για κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Ας δούμε ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στην έννοια της συνέχειας και στην έννοια του ορίου.

Πρώτη περίπτωση: Το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, με άλλα λόγια, είναι μεμονωμένο σημείο του A.
Για παράδειγμα το σημείο 0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού $A = \{0\} \cup [1, +\infty)$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$, όπως έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα.
Στην περίπτωση αυτή υπάρχει κάποιο $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε το ξ να είναι το μοναδικό σημείο του A που βρίσκεται στην περιοχή $(\xi - \delta_0, \xi + \delta_0)$.
Έστω, τώρα, ένα οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta = \delta_0$ και τότε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad x = \xi \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon.$$

Δηλαδή, ο ορισμός της συνέχειας ικανοποιείται παίρνοντας το ίδιο $\delta = \delta_0 > 0$ για όλα τα $\epsilon > 0$.
Επομένως, αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, τότε η συνάρτηση είναι αυτομάτως συνεχής στο ξ.

Δεύτερη περίπτωση: Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Σ' αυτήν την περίπτωση έχει νόημα να μιλήσουμε για το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και θα δούμε ότι

$$f \text{ συνεχής στο } \xi \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi).$$

Θα αντιπαραβάλλουμε τους ορισμούς των δυο εννοιών για να πιστοποιήσουμε την ισοδυναμία:

$$f \text{ συνεχής στο } \xi \quad \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ \big(x \in A, |x - \xi| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(\xi)| < \epsilon\big).$$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) \quad \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ \big(x \in A, 0 < |x-\xi| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(\xi)| < \epsilon\big).$$

Η πρώτη γραμμή λέει ότι όλα τα $x \in A$ που ανήκουν στην περιοχή $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ (συμπεριλαμβανομένου του $x = \xi$) ικανοποιούν την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. Η δεύτερη γραμμή λέει ότι όλα τα $x \in A$ που ανήκουν στην περιοχή $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, εκτός ίσως του $x = \xi$, ικανοποιούν την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$. Άρα είναι προφανές ότι η πρώτη γραμμή συνεπάγεται την δεύτερη. Όμως, μπορούμε αμέσως να δούμε ότι και η δεύτερη γραμμή

συνεπάγεται την πρώτη. Αυτό ισχύει διότι και ο $x = \xi$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, χωρίς να χρειάζεται να το υποθέσουμε. Πράγματι, για $x = \xi$ έχουμε $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$.
Επομένως, αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A τότε η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Θα μιλήσουμε τώρα για την έννοια της συνέχειας *στην ειδική περίπτωση των μονότονων συναρτήσεων*.

Ας υποθέσουμε ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και $\xi \in A$.

Αν το ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι ίσο με το supremum του συνόλου τιμών της f αριστερά του ξ:

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A, x < \xi\}.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$, οπότε το $f(\xi)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, x \in A, x < \xi\}$ και επομένως

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi).$$

Αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του ενώ, αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) < f(\xi)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του.

Ανάλογα ισχύουν κι από την δεξιά μεριά του ξ. Αν το ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι ίσο με το infimum του συνόλου τιμών της f δεξιά του ξ:

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A, \xi < x\}.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi < x$, οπότε το $f(\xi)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, x \in A, \xi < x\}$ και επομένως

$$f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Αν $f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του ενώ, αν $f(\xi) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του.

Πριν συνδυάσουμε τα δυο προηγούμενα, ας κάνουμε μερικές συμπληρωματικές παρατηρήσεις.

Επειδή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A, x < \xi\}$, ισχύει $f(x) \leq \lim_{x\to\xi-} f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$ και, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi \leq x$. Άρα στην περίπτωση που είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < f(\xi)$ ή, ισοδύναμα, που η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, τότε το ανοικτό διάστημα $(\lim_{x\to\xi-} f(x), f(\xi))$ δεν περιέχει *καμιά* τιμή της f ενώ αριστερά του και δεξιά του *υπάρχουν* τιμές της f.

Ομοίως, από την άλλη μεριά του ξ, επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A, \xi < x\}$, ισχύει $\lim_{x\to\xi+} f(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi < x$ και, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $x \leq \xi$. Άρα στην περίπτωση που είναι $f(\xi) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$ ή, ισοδύναμα, που η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, τότε το ανοικτό διάστημα $(f(\xi), \lim_{x\to\xi+} f(x))$ δεν περιέχει *καμιά* τιμή της f ενώ αριστερά του και δεξιά του *υπάρχουν* τιμές της f.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν το ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f. Ομοίως, αν το ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f.

Τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα ως εξής. Αν το ξ είναι αμφίπλευρο (δηλαδή από αριστερά του και από δεξιά του) σημείο συσσώρευσης του A, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Και τώρα έχουμε δυο περιπτώσεις.
Αν τα δυο πλευρικά όρια είναι ίσα, δηλαδή αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στο ξ.
Αν τα δυο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, δηλαδή αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και η f δεν είναι συνεχής στο ξ. Τότε η τιμή $f(\xi)$ βρίσκεται κάπου στο διάστημα ανάμεσα στα δυο πλευρικά όρια και μπορεί να ταυτίζεται με το πολύ ένα από αυτά: αν ταυτίζεται με το αριστερό τότε η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του αλλά όχι από δεξιά του, αν ταυτίζεται με το δεξιό τότε η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του αλλά όχι από αριστερά του και αν η τιμή $f(\xi)$ είναι γνησίως ανάμεσα στα δυο πλευρικά όρια τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ ούτε από αριστερά του ούτε από δεξιά του. Πάντως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f. Η διαφορά

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$$

ονομάζεται **άλμα** της f στο ξ και είναι θετικός αριθμός.

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με κατάλληλη προσαρμογή και για φθίνουσες συναρτήσεις.

Για περαιτέρω λεπτομέρειες πάνω σε όλα τα προηγούμενα δείτε την ενότητα 4.1 του βιβλίου.

Επίσης, δεν θα πω πολλά πάνω στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, όπως το ότι το άθροισμα και το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θα θεωρήσω αυτές τις ιδιότητες γνωστές από το πιο στοιχειώδες μάθημα του απειροστικού λογισμού. Μπορείτε να τις δείτε αναλυτικά και με διάφορα παραδείγματα στην ενότητα 4.2 του βιβλίου. Θα αποδείξω μόνο τη συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ (οπότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$) και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$ ώστε

$$y \in B, |y - \eta| < \delta' \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Τώρα, επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, για το δ' (που μόλις προέκυψε από το ϵ) υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(\xi)| < \delta'.$$

Και τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in A, |x - \xi| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \delta' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B, |f(x) - \eta| < \delta' \\ &\Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. $\square$

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ορίου με χρήση της συνέχειας της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2+x+1},$$

αν υπάρχει.
Έχουμε τις συναρτήσεις

$$y = f(x) = x^2 + x + 1, \qquad z = g(y) = e^y.$$

Τότε η συνάρτηση

$$z = h(x) = e^{x^2+x+1}$$

είναι η σύνθεση των g και f:

$$z = h(x) = e^{x^2+x+1} = e^{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Τώρα, η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και η g είναι συνεχής στο $y = 1 = f(0)$. Άρα η h είναι συνεχής στο $x = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2+x+1} = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = e.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} e^{x \sin\frac{1}{x}}.$$

Το προηγούμενο επιχείρημα δεν ισχύει τώρα, διότι η συνάρτηση $x \sin\frac{1}{x}$ και κατ' επέκταση η $e^{x\sin\frac{1}{x}}$ δεν είναι καν ορισμένες στο $x = 0$.
Για να βρούμε το όριο χρησιμοποιούμε την Πρόταση 4.10 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ (οπότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$) και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στο η, τότε $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$.*
Με άλλα λόγια:

$$\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\xi} f(x)).$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$ ώστε

$$y \in B, |y - \eta| < \delta' \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, για το δ' (που μόλις προέκυψε από το ϵ) υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \delta'.$$

Τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \delta' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B, |f(x) - \eta| < \delta' \\ &\Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \to \xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$. □

Τώρα στο παράδειγμά μας, επειδή $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ (αυτό αποδεικνύεται εύκολα με την ιδιότητα παρεμβολής, αφού $-|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$) και επειδή η $z = g(y) = e^y$ είναι συνεχής στο $y = 0$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to 0} e^{x \sin\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Αν θέλουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη Πρόταση για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ως εξής. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

η οποία ορίζεται και στο 0 και είναι συνεχής και στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Τώρα έχουμε τη σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $z = g(y) = e^y$ και

$$\lim_{x\to 0} e^{x\sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 1.$$

Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις όπου δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση για την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων και τότε χρειάζεται η τελευταία Πρόταση. Δείτε παραδείγματα στο βιβλίο.

Και τώρα διατυπώνουμε απλώς το Θεώρημα 4.1 του βιβλίου. Δεν θα κάνω την απόδειξή του. Είναι παρόμοια με την απόδειξη του παρόμοιου Θεωρήματος για τη σχέση ανάμεσα σε όρια συναρτήσεων και σε όρια ακολουθιών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Παράδειγμα. Το όριο ακολουθίας $\left(e^{\frac{1}{n^2}}\right)$, όπου το n τείνει στο $+\infty$ παίρνοντας μόνο ακέραιες τιμές, υπολογίζεται ως εξής. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = f(x) = e^x,$$

η οποία είναι συνεχής στο $x = 0$ και, επειδή $\frac{1}{n^2} \to 0$, συνεπάγεται

$$e^{\frac{1}{n^2}} \to e^0 = 1.$$

Και ερχόμαστε στα τρία βασικά Θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. *Κάθε συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. θα αποδείξουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, δηλαδή ότι υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή για κάθε $M \geq 0$ υπάρχει κάποιο αντίστοιχο $x \in [a, b]$ ώστε $|f(x)| > M$.
Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αντίστοιχο $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$|f(x_n)| > n.$$

Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $|f(x_n)| > n$ για κάθε n και, επομένως,

$$|f(x_n)| \to +\infty. \tag{5}$$

Μια σκέψη: Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν η ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ συγκλίνει, αλλά ας κάνουμε την υπόθεση ότι η (x_n) συγκλίνει για να δούμε που θα καταλήξουμε.
Έστω λοιπόν ότι $x_n \to \xi$ για κάποιο ξ. Επειδή ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως, $f(x_n) \to f(\xi)$. Άρα $|f(x_n)| \to |f(\xi)|$, οπότε λόγω μοναδικότητας ορίου πρέπει να είναι $|f(\xi)| = +\infty$ το οποίο είναι άτοπο.
Το πρόβλημα είναι ότι η (x_n) μπορεί να μην συγκλίνει αλλά μας σώζει το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass. Και τώρα συνεχίζουμε κανονικά την απόδειξη.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στο ξ, οπότε από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ και, επομένως,

$$|f(x_{n_k})| \to |f(\xi)|. \tag{6}$$

Όμως, από την (5) έχουμε

$$|f(x_{n_k})| \to +\infty \tag{7}$$

και από τις (6) και (7) καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Κάθε συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Τώρα υποθέτουμε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\xi, \eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει

$$f(\eta) \leq f(x) \leq f(\xi) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Εδώ θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της ύπαρξης του ξ.
Θεωρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$Y = \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Το Y είναι μη-κενό και, λόγω του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης, είναι φραγμένο. Άρα το $u = \sup Y$ είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι το u είναι στοιχείο του Y,

οπότε το u θα είναι το μέγιστο στοιχείο του Y, δηλαδή η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.
Από την δεύτερη ιδιότητα του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο του Y ανάμεσα στους $u - \frac{1}{n}$ και u. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αντίστοιχο $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u.$$

Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$ για κάθε n, οπότε

$$f(x_n) \to u. \tag{8}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ. Άρα από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi). \tag{9}$$

Λόγω της (8) συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to u \tag{10}$$

και από τις (9) και (10) έχουμε

$$f(\xi) = u.$$

Τώρα, το $u = \sup Y$ είναι άνω φράγμα του Y οπότε ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $Y = \{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$, προκύπτει ο η. $\square$

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και αριθμός λ τέτοιος ώστε $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

Απόδειξη. Έστω
$$f(a) \leq \lambda \leq f(b).$$
Θεωρούμε το σύνολο
$$X = \{x \,|\, a \leq x \leq b, f(x) \leq \lambda\}.$$
Το X είναι μη-κενό διότι $a \in X$. Επίσης, $X \subseteq [a, b]$, οπότε το X είναι και άνω φραγμένο. Άρα το $\sup X$ είναι αριθμός και έστω
$$\xi = \sup X.$$
Κατ' αρχάς, επειδή $a \in X$, συνεπάγεται $a \leq \xi$ και, επειδή ισχύει $x \leq b$ για κάθε $x \in X$, συνεπάγεται ότι το b είναι άνω φράγμα του X και άρα $\xi \leq b$. Άρα $\xi \in [a, b]$.
Θα αποδείξουμε ότι $f(\xi) = \lambda$, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $f(\xi) > \lambda$ και $f(\xi) < \lambda$.
Έστω $f(\xi) > \lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi \neq a$ (αφού $f(a) \leq \lambda$), οπότε $a < \xi \leq b$. Επειδή $f(\xi) > \lambda$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) > \lambda$ κοντά στο ξ. Άρα υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $a < c < \xi$, αρκετά κοντά στο ξ, και ώστε να ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in (c, \xi]$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του $\xi = \sup X$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \in (c, \xi]$, οπότε γι αυτό το x θα ισχύει $f(x) \leq \lambda$. Άτοπο, διότι είπαμε ότι για κάθε $x \in (c, \xi]$ ισχύει $f(x) > \lambda$.
Τώρα, έστω $f(\xi) < \lambda$. Τότε $\xi \neq b$ (αφού $\lambda \leq f(b)$), οπότε $a \leq \xi < b$. Επειδή $f(\xi) < \lambda$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < \lambda$ κοντά στο ξ. Άρα υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $\xi < c < b$, αρκετά κοντά στο ξ, και ώστε να ισχύει $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [\xi, c)$. Τώρα, κάθε $x \in [a, b]$ με $f(x) \leq \lambda$ περιέχεται στο X και άρα είναι $\leq \xi$. Άρα για κάθε $x \in (\xi, b]$ πρέπει να ισχύει $f(x) > \lambda$. Άτοπο, διότι για κάθε $x \in [\xi, c)$ ισχύει $f(x) < \lambda$.
Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$. □

Πόρισμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής είναι το:

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο (a, b).*

Απόδειξη. Από $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής με $\lambda = 0$ και έχουμε λύση $\xi \in [a, b]$ της $f(x) = 0$.
Επειδή $f(a) \neq 0$ και $f(b) \neq 0$, το ξ ανήκει στο (a, b). □

Αποδείξαμε το θεώρημα του Bolzano βάσει του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε και το αντίστροφο.
Πράγματι, έστω ότι ισχύει το θεώρημα του Bolzano και έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$.
Αν $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε υπάρχει προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = \lambda$: ο a ή ο b, αντιστοίχως.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - \lambda.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $g(a) < 0 < g(b)$ ή $g(b) < 0 < g(a)$. Άρα $g(a)g(b) < 0$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει λύση στο (a, b) και, επομένως, και η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει λύση στο (a, b).
Άρα αποδείξαμε το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.
Επομένως, *το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και το Θεώρημα του Bolzano είναι ισοδύναμα.*

Τώρα θα δούμε δυο ακόμη πορίσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f συνεχής σε διάστημα I. Αν ένας αριθμός είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, τότε κι αυτός είναι τιμή της f στο I.*

Απόδειξη. Έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ για κάποια $a, b \in I$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = \lambda$ και έτσι ο λ είναι τιμή της f στο I. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I. Αν η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I, τότε η f είναι είτε θετική σε ολόκληρο το I είτε αρνητική σε ολόκληρο το I.*

Απόδειξη. Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0 < f(b)$. Δηλαδή το 0 είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, οπότε, σύμφωνα με την αμέσως προηγούμενη Πρόταση, το 0 είναι κι αυτό τιμή της f στο I. Άτοπο. □

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να καταλάβουμε τον ρόλο της συνέχειας σε αυτά τα συμπεράσματα.
Αν έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα I (και δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο I) η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I, τότε το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι για κάποια $x \in I$ θα ισχύει $f(x) < 0$ και για τα υπόλοιπα $x \in I$ θα ισχύει $f(x) > 0$.
Αν όμως έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα I η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I και γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο I, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είτε για κάθε $x \in I$ θα ισχύει $f(x) < 0$ είτε για κάθε $x \in I$ θα ισχύει $f(x) > 0$.

Ως εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής μπορούμε να αποδείξουμε το γνωστό από παλιά Θεώρημα ύπαρξης n-οστής ρίζας και μάλιστα στην γενική περίπτωση και όχι μόνο για $n = 2$.

Παράδειγμα. *Η εξίσωση $x^n = y$ με $y \geq 0$ έχει μοναδική λύση $x \geq 0$.*
Για να το αποδείξουμε θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x^n,$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Θεωρούμε τον

$$b = \max\{y, 1\},$$

οπότε $b \geq 1$ και $b \geq y$ και, επομένως, $b^n \geq b \geq y$.
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στο διάστημα $[0, b]$ και στη συνάρτηση

$f(x) = x^n$. Επειδή $f(0) = 0 \leq y$ και $f(b) = b^n \geq y$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [0, b]$ ώστε $f(\xi) = y$, δηλαδή $\xi^n = y$.
Η μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ προκύπτει από το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 18x + 5 = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση.
θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 18x + 5.$$

Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 5 > 0$, $f(1) = -15 < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Επειδή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος αρνητικός a (δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος θετικός b ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Από την υπολογιστική άποψη ο πρώτος τρόπος είναι προτιμώτερος, διότι μας επιτρέπει να εντοπίσουμε την λύση της εξίσωσης μέσα σε κάποιο *συγκεκριμένο* διάστημα. Μάλιστα, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα τόσο καλύτερο είναι το αποτέλεσμα από την υπολογιστική πάντα άποψη.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 4.1.9. [α] *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{αν}\, x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \textit{αν}\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε x.

Πρώτη λύση: Παίρνουμε ένα οποιονδήποτε x. Θα βρούμε ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο t ώστε $|t - x| < \delta$ και $|f(t) - f(x)| \geq \epsilon$. Αυτό ακριβώς είναι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας στο x και, επομένως, η f θα είναι ασυνεχής στο x.
Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 1$.
Αν θέλουμε να πετύχουμε να ισχύει $|f(t)-f(x)| = |f(t)-1| \geq \epsilon > 0$, τότε αναγκαστικά ο t πρέπει να είναι άρρητος, διότι αν ο t είναι ρητός τότε $|f(t) - f(x)| = |1 - 1| = 0$. Μάλιστα, αν ο t είναι πράγματι άρρητος τότε θα είναι $|f(t) - f(x)| = |0 - 1| = 1$ και θα ισχύει $|f(t) - f(x)| \geq \epsilon$ αρκεί να έχουμε φροντίσει να επιλέξουμε $\epsilon \leq 1$.
Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά, επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \leq 1$ (για παράδειγμα $\epsilon = 1$ ή $\epsilon = \frac{1}{2}$). Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$. Ένας τέτοιος t ικανοποιεί την $|t - x| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, αφού $|f(t) - f(x)| = |0 - 1| = 1 \geq \epsilon$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 0$.
Σκεφτόμαστε όπως και στην πρώτη περίπτωση και καταλήγουμε πάλι στο εξής.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \leq 1$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $t \in \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$. Ένας τέτοιος t ικανοποιεί την $|t - x| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, αφού $|f(t) - f(x)| = |1 - 0| = 1 \geq \epsilon$.

Δεύτερη λύση: Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο x, τότε γνωρίζουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ συνεπάγεται $f(x_n) \to f(x)$.
Άρα για να αποδείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x, αρκεί να βρούμε μία ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ για την οποία δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Γνωρίζουμε, όμως, ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία (x_n) είτε με όλους τους όρους της ρητούς είτε με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. (Πράγματι, αυτό γίνεται επιλέγοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έναν ρητό ή άρρητο x_n ώστε $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$.) Οπότε έχουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 1$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. Τότε, όμως, ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 0$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της ρητούς ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει $f(x_n) = 1$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 1$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

[β] *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{αν}\, x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \textit{αν}\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$ και συνεχής στο $x = 0$.

Λύση: Έστω $x \neq 0$.

Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, οπότε $f(x) = x \neq 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 0$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της ρητούς ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει $f(x_n) = x_n$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to x$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι ασυνεχής στο x.

Τώρα έστω $x = 0$.
Πρώτος τρόπος: Από τον τύπο της συνάρτησης συνεπάγεται αμέσως ότι ισχύει

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

για κάθε x. Άρα από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
Δεύτερος τρόπος: Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) \to f(0) = 0$.
Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν ισχύει τελικά $x_n \in \mathbb{Q}$ (δηλαδή αν από έναν δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι ρητοί), τότε ισχύει τελικά $f(x_n) = x_n$ και, επομένως, $f(x_n) \to 0$.
Αν ισχύει τελικά $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (δηλαδή αν από έναν δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι άρρητοι), τότε ισχύει τελικά $f(x_n) = 0$ και, επομένως, $f(x_n) \to 0$.
Η τρίτη περίπτωση είναι να έχει η (x_n) άπειρους ρητούς όρους και άπειρους άρρητους όρους. Τότε η (x_n) χωρίζεται σε δύο ακριβώς υποακολουθίες, την (x'_n) και την (x''_n), όπου η πρώτη αποτελείται από τους ρητούς όρους και η δεύτερη από τους άρρητους όρους της (x_n). Επειδή $x_n \to 0$, συνεπάγεται $x'_n \to 0$ και $x''_n \to 0$. Όπως είδαμε πριν, έχουμε $f(x'_n) = x'_n \to 0$ και $f(x''_n) = 0 \to 0$. Επειδή οι δυο υποακολουθίες $\big(f(x'_n)\big)$ και $\big(f(x''_n)\big)$ σχηματίζουν ολόκληρη την ακολουθία $(f(x_n))$ συνεπάγεται ότι $f(x_n) \to 0$.
Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Παρατήρηση: Στο τέλος της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε την εξής ιδιότητα των ακολουθιών.
Αν μια ακολουθία (y_n) χωρισθεί σε ακριβώς δυο υποακολουθίες (y'_n) και (y''_n) (όπως για παράδειγμα οι υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών) και αν $y'_n \to y$ και $y''_n \to y$, τότε $y_n \to y$.
Αυτήν την ιδιότητα δεν την έχουμε αποδείξει. Η απόδειξή της είναι παρόμοια με την απόδειξη στην περίπτωση των υποακολουθιών με τους άρτιους και τους περιττούς δείκτες.

Παρατήρηση: Μπορούμε να κάνουμε και μια άλλου τύπου απόδειξη ως εξής. Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε ότι

$$\lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 0} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 0} x = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \to 0} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \to 0} 0 = 0.$$

Τώρα, επειδή τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ σχηματίζουν ολόκληρο το $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A = B \cup C$ με $B \cap C = \emptyset$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B και του C και αν $\lim_{x\in B, x\to\xi} f(x) = l$ και $\lim_{x\in C, x\to\xi} f(x) = l$, τότε $\lim_{x\in A, x\to\xi} f(x) = l$.

Δεν θα αποδείξουμε ατήν την ιδιότητα. Όποιος θέλει μπορεί να το κάνει. Δεν είναι πολύ δύσκολο. Πάντως η ιδιότητα αυτή είναι εντελώς ανάλογη της ιδιότητας των ακολουθιών που αναφέραμε στην πρώτη παρατήρηση. Και στις δυο περιπτώσεις χωρίζουμε το πεδίο ορισμού (το σύνολο στο οποίο τρέχει η ανεξάρτητη μεταβλητή) σε δυο ξένα υποσύνολα. Στη πρώτη περίπτωση χωρίζουμε το $\mathbb{N}$ σε δυο υποσύνολα (για παράδειγμα το σύνολο των άρτιων και το σύνολο των περιττών φυσικών) και στην δεύτερη περίπτωση χωρίζουμε το A στα B και C (για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ στα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Άσκηση 4.2.10. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a) = 0$ και $f(b) \neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστη ρίζα της f στο $[a, b]$.*

Λύση: Θεωρούμε το σύνολο των ριζών της f στο $[a, b]$:

$$X = \{x \mid a \leq x \leq b, f(x) = 0\}.$$

Το X είναι μη-κενό (διότι $a \in X$) και άνω φραγμένο (διότι $X \subseteq [a, b]$). Άρα το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Επειδή $a \in X$, συνεπάγεται $a \leq \xi$. Και επειδή το b είναι άνω φράγμα του X, συνεπάγεται $\xi \leq b$. Άρα $\xi \in [a, b]$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ.

Από τη δεύτερη ιδιότητα του supremum συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει κάποιο $x_n \in X$ ώστε

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi.$$

Επομένως,

$$x_n \to \xi$$

και, επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, έχουμε

$$f(x_n) \to f(\xi).$$

Όμως, ισχύει $x_n \in X$ και, επομένως,

$$f(x_n) = 0$$

για κάθε n. Άρα

$$f(x_n) \to 0.$$

Λόγω μοναδικότητας ορίου:

$$f(\xi) = 0.$$

Άρα $\xi \in X$ και επειδή το ξ είναι το supremum του X, συμπεραίνουμε ότι το ξ είναι η μέγιστη ρίζα της f στο $[a, b]$.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 4.2.11. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα I (όχι μονοσύνολο). Αν ισχύει $f(r) \geq 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.*

Πρώτη λύση: Έστω $x \in I$. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών (r_n) στο διάστημα I ώστε

$$r_n \to x.$$

Ας αιτιολογήσουμε αυτόν τον ισχυρισμό. Επειδή το I είναι διάστημα θετικού μήκους και $x \in I$, υπάρχει διάστημα της μορφής $[x, c)$ ή της μορφής $(c, x]$ το οποίο περιέχεται ολόκληρο στο I. Στην πρώτη περίπτωση (και αναλόγως στην δεύτερη περίπτωση) γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ρητός r_n τέτοιος ώστε $x \leq r_n < x + \frac{c-x}{n}$. Τότε η ακολουθία ρητών (r_n) είναι ολόκληρη μέσα στο $[x, c)$ και, επομένως, μέσα στο I και ισχύει $r_n \to x$.
Τώρα θεωρούμε μια τέτοια ακολουθία ρητών (r_n) και, επειδή η f είναι συνεχής στο x, έχουμε ότι

$$f(r_n) \to f(x).$$

Όμως, βάσει της υπόθεσης έχουμε ότι ισχύει

$$f(r_n) \geq 0$$

για κάθε n. Άρα

$$f(x) \geq 0.$$

Δεύτερη λύση: Έστω ότι υπάρχει κάποιο $x \in I$ ώστε

$$f(x) < 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x, είναι

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x) < 0,$$

οπότε ισχύει

$$f(t) < 0 \qquad \text{κοντά στο } x.$$

Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(t) < 0 \qquad \text{για κάθε } t \in (x - \delta, x + \delta) \cap I.$$

Επειδή $x \in I$ και το I έχει θετικό μήκος, το $(x - \delta, x + \delta) \cap I$ είναι διάστημα θετικού μήκους. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός r στο $(x - \delta, x + \delta) \cap I$, οπότε γι αυτόν τον ρητό ισχύει

$$f(r) < 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι για κάθε ρητό r πρέπει να ισχύει $f(r) \geq 0$.
Άρα ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 4.3.4. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έστω ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει κάποιο $x' \in [a, b]$ τέτοιο ώστε*

$$|f(x')| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

Αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[a,b]$.

Πρώτη λύση: Η συνάρτηση $|f|$ είναι κι αυτή συνεχής στο $[a,b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε να ισχύει

$$|f(\xi)| \leq |f(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{11}$$

Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει κάποιος $\xi' \in [a,b]$ τέτοιος ώστε

$$|f(\xi')| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

Για τον ξ' από την (11) συνεπάγεται

$$|f(\xi)| \leq |f(\xi')|.$$

Άρα

$$|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)|$$

και, επομένως, $f(\xi) = 0$.

Δεύτερη λύση: Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $x_1 \in [a,b]$ (για παράδειγμα $x_1 = a$ ή $x_1 = b$ ή $x_1 = \frac{a+b}{2}$).
Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_2 \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|.$$

Πάλι βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_3 \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_3)| \leq \frac{1}{2}|f(x_2)|.$$

Συνεχίζοντας έτσι επ' άπειρον, σχηματίζεται μια ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ (όπου κάθε όρος της (x_n) προκύπτει από τον προηγούμενο) τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|f(x_n)|$$

για κάθε n.
Τότε, όμως, έχουμε

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}|f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{2^2}|f(x_{n-2})| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|,$$

δηλαδή

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|$$

για κάθε n.
Άρα

$$f(x_n) \to 0. \tag{12}$$

Η ίδια σκέψη με αυτήν στην απόδειξη του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης: Δεν ξέρουμε αν η ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ συγκλίνει, αλλά ας κάνουμε την υπόθεση ότι η (x_n) συγκλίνει για να δούμε που θα καταλήξουμε.

Έστω ότι $x_n \to \xi$ για κάποιο ξ. Επειδή ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως, $f(x_n) \to f(\xi)$. Λόγω μοναδικότητας ορίου συνεπάγεται $f(\xi) = 0$ και έχουμε αποδείξει την ύπαρξη ρίζας.
Το πρόβλημα είναι ότι η (x_n) μπορεί να μην συγκλίνει αλλά μας σώζει το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass. Και τώρα συνεχίζουμε κανονικά την λύση.

Από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi$$

για κάποιο ξ.
Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως,

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi).$$

Από την (12) συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to 0$$

και λόγω μοναδικότητας ορίου έχουμε

$$f(\xi) = 0.$$

Άρα αποδείξαμε την ύπαρξη ρίζας της f στο $[a, b]$.

Άσκηση 4.4.7. *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $\rho > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h = f - g.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει

$$h(x) > 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b]. \tag{13}$$

Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$h(\xi) \leq h(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Ο αριθμός $\rho = h(\xi)$ είναι, λόγω της (13), θετικός και άρα έχουμε

$$0 < \rho \leq h(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Αυτό είναι το συμπέρασμα το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε.

Άσκηση 4.4.9. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα I. Αν ισχύει $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < f(b)$. Τότε, όμως, υπάρχει κάποιος άρρητος λ έτσι ώστε $f(a) < \lambda < f(b)$.
Ο λ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, οπότε είναι κι αυτός τιμή της f στο I.

Αυτό είναι άτοπο διότι όλες οι τιμές της f είναι ρητοί.
Άρα η f είναι σταθερή στο I.

Άσκηση 4.4.11. *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$.*
Έστω επιπλέον ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο I και ότι $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Λύση: Για το πρώτο μέρος θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi = f - g.$$

Η ϕ είναι συνεχής στο I και ισχύει

$$\phi(x) \neq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Άρα η ϕ διατηρεί πρόσημο στο I, οπότε είτε ισχύει $\phi(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $\phi(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς ό,τι θέλουμε να αποδείξουμε.
Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε την συνάρτηση

$$\psi = \frac{1}{2}(f + g).$$

Η ψ είναι συνεχής στο I.
Ας δούμε πώς συγκρίνεται η ψ με τις f και g.
Θεωρούμε την περίπτωση που ισχύει

$$f(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

(Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια.)
Τότε, προφανώς, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) < \psi(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τώρα η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g και, επομένως, ισχύει

$$h(x) \neq \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους στις h και ψ, έχουμε ότι είτε ισχύει $h(x) < \psi(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) > \psi(x)$ για κάθε $x \in I$. Και, πάλι επειδή η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g, συνεπάγεται ότι, αντιστοίχως, είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 4.4.12. [α] *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = g(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Λύση: Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$. Επίσης συνεπάγεται ότι καθεμιά από τις f, g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I. Άρα οι f, g διατηρούν πρόσημο στο I, οπότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ και ομοίως για την g. Και τώρα είναι προφανές ότι, στην περίπτωση που οι f, g είναι ομόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ και, στην περίπτωση που οι f, g είναι ετερόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.

[β] *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.*

Λύση: Εφαρμόζουμε το μέρος [α] στις συναρτήσεις f και $g(x) = x$ αλλά στο διάστημα $(0, +\infty)$ αντί του $[0, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Επειδή $f(0)^2 = 0^2 = 0$, έχουμε ότι $f(0) = 0$ και άρα και οι δυο ισότητες $f(x) = x$ και $f(x) = -x$ ισχύουν και για $x = 0$.
Άρα είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

[γ] *Τί συμπεραίνεται αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;*

Λύση: Το συμπέρασμα του μέρους [β] ισχύει (με την ίδια αιτιολόγηση) και για το διάστημα $(-\infty, 0]$ αντί του $[0, +\infty)$.
Άρα έχουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και ομοίως για το $(-\infty, 0]$. Έτσι έχουμε τέσσερις δυνατότητες για την f στο $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ οι οποίες διατυπώνονται ως εξής: είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και οι τέσσερις δυνατότητες είναι αποδεκτές διότι και οι τέσσερις συναρτήσεις f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Πριν από την επόμενη άσκηση ας θυμηθούμε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι ένα-προς-ένα αλλά όχι γνησίως μονότονες. Η άσκηση που ακολουθεί λέει ότι το αντίστροφο ισχύει αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα.

Άσκηση 4.4.19. *Έστω συνάρτηση f συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I. Τότε υπάρχουν τρία σημεία a, b, c στο I με $a < b < c$ τέτοια ώστε

$$f(a) < f(b) > f(c) \qquad \text{ή} \qquad f(a) > f(b) < f(c).$$

Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση (η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια).
Επειδή $f(a) < f(b)$ και $f(c) < f(b)$, συνεπάγεται ότι $\max\{f(a), f(c)\} < f(b)$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό λ ώστε

$$\max\{f(a), f(c)\} < \lambda < f(b).$$

Τότε ο λ είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ καθώς και ανάμεσα στις τιμές $f(b)$ και $f(c)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, b]$ και $[b, c]$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1 \in (a, b)$ και $x_2 \in (b, c)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) = \lambda \qquad \text{και} \qquad f(x_2) = \lambda.$$

Τότε όμως $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Συνεχίζουμε με θεωρία.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα ενός οποιουδήποτε διαστήματος είναι η εξής: αν ένας αριθμός είναι ανάμεσα σε δυο σημεία του διαστήματος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι σημείο του διαστήματος. Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή την Πρόταση 1.4 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και αν $x_1 < x < x_2$, τότε $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Το A είναι μη-κενό, οπότε έχει supremum και infimum στο $\overline{\mathbb{R}}$ και

$$\inf A \leq \sup A.$$

Τώρα, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x \leq \sup A$, οπότε

$$A \subseteq [\inf A, \sup A].$$

Έστω $x \in (\inf A, \sup A)$.
Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε $x_1 < x < x_2$. Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως,

$$(\inf A, \sup A) \subseteq A.$$

Άρα έχουμε ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις:

$$A = (\inf A, \sup A), \quad A = [\inf A, \sup A], \quad A = (\inf A, \sup A], \quad A = [\inf A, \sup A).$$

Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα και, μάλιστα, με άκρα τα $\inf A$ και $\sup A$. □

Τώρα θα εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε συνεχείς συναρτήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\},$$

είναι κι αυτό διάστημα.

Απόδειξη. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$ και έστω $y_1 < y < y_2$. Τότε το y είναι ανάμεσα στις τιμές y_1 και y_2 της f στο I, οπότε και το y είναι τιμή της f στο I, δηλαδή $y \in f(I)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, το $f(I)$ είναι διάστημα. □

Προφανώς, στην προηγούμενη Πρόταση τα άκρα του διαστήματος $f(I)$ είναι το $\inf f(I) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$ και το $\sup f(I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$. Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο I, τότε αυτή η ελάχιστη τιμή είναι το ελάχιστο στοιχείο του $f(I)$, οπότε το διάστημα $f(I)$ είναι κλειστό από την αριστερή μεριά του. Ομοίως, αν η f έχει μέγιστη τιμή στο I, τότε αυτή η μέγιστη τιμή είναι το μέγιστο στοιχείο του $f(I)$, οπότε το διάστημα $f(I)$ είναι κλειστό από την δεξιά μεριά του.

Θα περιγράψουμε τώρα το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα σε διάφορες περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε $f([a, b]) = [m, M]$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται η ύπαρξη των m, M και επειδή το $f([a, b])$ είναι διάστημα, πρέπει να είναι το $[m, M]$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1}$ ($a_{2n-1} \neq 0$). Τότε το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$.*

[β] *Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ ($a_{2n} \neq 0$). Αν $a_{2n} > 0$, τότε το p έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, και $p(\mathbb{R}) = [m, +\infty)$. Αν $a_{2n} < 0$, τότε το p έχει μέγιστη τιμή, έστω M, και $p(\mathbb{R}) = (-\infty, M]$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $a_{2n-1} > 0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ δεν είναι κάτω φραγμένο ούτε άνω φραγμένο και, επειδή είναι διάστημα, συνεπάγεται $p(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.
Αν $a_{2n-1} < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη είναι ίδια.

[β] Έστω $a_{2n} > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $b > 0$ ώστε να ισχύει

$$p(x) > p(0) \qquad \text{για κάθε } x > b. \tag{14}$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $a < 0$ ώστε να ισχύει

$$p(x) > p(0) \qquad \text{για κάθε } x < a. \tag{15}$$

Τώρα, η συνάρτηση p είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, στο διάστημα αυτό. Δηλαδή, ισχύει

$$m \leq p(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b]. \tag{16}$$

Επειδή $0 \in [a, b]$, από την (16) συνεπάγεται $m \leq p(0)$, οπότε από τις (14) και (15) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$m < p(x) \qquad \text{για κάθε } x < a \text{ και για κάθε } x > b. \tag{17}$$

Τώρα, από τις (16) και (17) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$m \leq p(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα το m (που δεν ξεχνάμε ότι είναι τιμή της συνάρτησης) είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, δηλαδή το ελάχιστο στοιχείο του $p(\mathbb{R})$.
Τώρα, πάλι επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$, το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Και, επειδή το $p(\mathbb{R})$ είναι διάστημα, πρέπει να είναι το $[m, +\infty)$.
Αν $a_{2n} < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 4.1.15. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη στο I.*
[α] *Αν το σύνολο τιμών $J = f(I)$ της f είναι διάστημα, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.*
[β] *Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι η $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής στο J.*

Λύση: [α] Επειδή η f είναι μονότονη σε διάστημα, γνωρίζουμε ότι, αν η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $\xi \in I$, τότε υπάρχει κάποιο διάστημα K (θετικού μήκους) το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f. Δηλαδή, υπάρχουν τιμές της f και στις δυο μεριές του K και καμιά τιμή της f στο K. Τότε, όμως, το σύνολο τιμών της f δεν μπορεί να είναι διάστημα.
Άρα, αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$.
[β] Η f είναι γνησίως μονότονη στο I, οπότε ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών J της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού I της f. Δηλαδή $f^{-1} : J \to I$.
Η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα J (διότι η f είναι γνησίως μονότονη) και το σύνολο τιμών της είναι διάστημα (το I). Άρα, εφαρμόζοντας το [α] στην f^{-1}, βλέπουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο J.

Είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών $f(I)$ είναι κι αυτό διάστημα. Θα μελετήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση που η f είναι, εκτός από συνεχής, και γνησίως μονότονη στο I. Θα διακρίνουμε διάφορες υποπεριπτώσεις, ανάλογα με το είδος του διαστήματος I.

Πρώτη περίπτωση: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$.
Τότε η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(a)$ και η μέγιστη τιμή της είναι η $f(b)$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), f(b)]$.
Είναι προφανές ότι, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[a, b]$, τότε το σύνολο τιμών είναι το $[f(b), f(a)]$.

Δεύτερη περίπτωση: Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b).
Τώρα το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$ και το b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$.
Επειδή η f είναι αύξουσα, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια και, μάλιστα, έχουμε και τύπους για αυτά:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, a < x < b\} = \inf f\big((a, b)\big),$$

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, a < x < b\} = \sup f\big((a, b)\big).$$

Όμως, γνωρίζουμε επίσης ότι γενικά το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα είναι το διάστημα με άκρα το infimum και το supremum του συνόλου τιμών. Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύνολο τιμών $f\big((a, b)\big)$ της f είναι το διάστημα με άκρα $A = \lim_{x\to a+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to b-} f(x)$. Επειδή η f είναι *γνησίως* αύξουσα στο (a, b), δεν μπορεί να έχει ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το ανοικτό διάστημα (A, B).
Αναλόγως, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (a, b), τότε το σύνολο τιμών της είναι το (B, A), όπου A, B είναι τα ίδια με πριν.

Τρίτη περίπτωση: Έστω $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τώρα το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$.

Ακριβώς όπως πριν, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(A, f(b)]$, όπου $A = \lim_{x\to a+} f(x)$.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(a, b]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[f(b), A)$.

Τέταρτη περίπτωση: Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$. Τώρα το b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$.

Και πάλι, όπως πριν, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), B)$, όπου $B = \lim_{x\to b-} f(x)$.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[a, b)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(B, f(a)]$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η κατάσταση είναι η εξής:

$$f : I \to J,$$

όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα I και το σύνολο τιμών της f είναι το J, το οποίο είναι διάστημα ίδιου τύπου με το I. Αν ένα άκρο του I ανήκει στο I, τότε το αντίστοιχο άκρο του J ανήκει στο J και είναι η τιμή της f στο άκρο του I. Αν ένα άκρο του I δεν ανήκει στο I, τότε το αντίστοιχο άκρο του J δεν ανήκει στο J και είναι το (πλευρικό) όριο της f στο άκρο του I. Αυτομάτως, η αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} : J \to I$$

είναι γνησίως αύξουσα στο J, έχει σύνολο τιμών το I, και το σημαντικό είναι ότι είναι κι αυτή *συνεχής* στο J. Πράγματι, το συμπέρασμα της άσκησης 4.1.15 που λύσαμε πριν λίγο είναι ότι "συνάρτηση μονότονη σε διάστημα με σύνολο τιμών διάστημα είναι συνεχής".

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 e^x + x + 1 \qquad \text{για } x \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, έχουμε

$$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq {x_1}^2 < {x_2}^2,\ 0 < e^{x_1} < e^{x_2},\ x_1 < x_2.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δυο πρώτες ανισότητες και προσθέτοντας στην ανισότητα που θα προκύψει την τρίτη ανισότητα, βρίσκουμε

$${x_1}^2 e^{x_1} + x_1 + 1 < {x_2}^2 e^{x_2} + x_2 + 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\big[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\big) = [1, +\infty).$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής*. Η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει, όπως έχουμε πει, από το ότι είναι μονότονη και από το ότι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της είναι διαστήματα. Θα μπορούσαμε να δούμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής με πιο στοιχειώδη τρόπο αν μπορούσαμε να βρούμε τον τύπο της. Για να γίνει αυτό πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y = x^2e^x + x + 1$ ως προς x αλλά αυτό είναι αδύνατο!

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Την συνάρτηση αυτή συμβολίζουμε, ως γνωστόν, με το σύμβολο

$$\arcsin : [-1, 1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Παράδειγμα: Η $f(x) = \tan x$ περιορισμένη στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\big(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x)\big) = (-\infty, +\infty)$.
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Την συνάρτηση αυτή συμβολίζουμε με το σύμβολο

$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Άσκηση 4.5.3. *Βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση*

$$\frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2} = c.$$

Ο αριθμός των λύσεων πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού την ένωση $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.
Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα τέσσερα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της. (Όμως η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα συνολικά στο πεδίο ορισμού της.)
Άρα, υπολογίζοντας όρια, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(-\infty, -1)$ είναι το $(0, -\infty)$, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(-1, 1)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(1, 2)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και, τέλος, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(2, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$.
Τώρα, αν $c > 0$, ο c ανήκει στα σύνολα τιμών της f που αντιστοιχούν στα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ αλλά όχι στο σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ και καμία λύση στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Επιπλέον, σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η αντίστοιχη λύση της $f(x) = c$ είναι μοναδική. Το συμπέρασμα είναι ότι, αν $c > 0$, τότε η $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν $c < 0$, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, 2)$.
Τέλος, αν $c = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 1)$ και $(1, 2)$. Η τιμή $c = 0$ δεν περιέχεται στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα δυο άλλα διαστήματα.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει παράγωγο στο ξ αν υπάρχει το όριο

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο ξ.
Ομοίως, αν το $\xi \in A$ είναι πλευρικό σημείο συσσώρευσης του A, τότε ορίζονται οι αντίστοιχες πλευρικές παράγωγοι

$$f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \qquad f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Τονίζω ότι τα παραπάνω όρια είναι αριθμοί ή $+\infty$ ή $-\infty$. Δηλαδή $f'(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι *αριθμός*, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο ξ.

Άσκηση 5.1.3. *Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \le 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Βρείτε τα a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$.

Λύση: Θέλουμε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Ισοδύναμα, θέλουμε να υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια και να είναι ίσα.
Το αριστερό πλευρικό όριο είναι εύκολο:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{2x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} (2x + 1) = 1.$$

Άρα θέλουμε το δεξιό πλευρικό όριο να είναι ίσο με 1. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0+} \frac{ax + b - 1}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0+} \Big(a + \frac{b - 1}{x}\Big) = 1.$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι το $\lim_{x\to 0+}(a + \frac{b-1}{x})$ είναι ίσο με $(b-1)(+\infty)$, αν $b - 1 \neq 0$, και ίσο με a, αν $b - 1 = 0$. Άρα έχουμε, ισοδύναμα,

$$a = 1,\; b = 1.$$

Άρα η f έχει παράγωγο στο 0 αν και μόνο αν $a = b = 1$.

Και τώρα έχουμε την Πρόταση 5.3 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, τότε είναι και συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει και είναι *αριθμός*. Τότε γράφουμε

$$f(x) = f(x) - f(\xi) + f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\,(x - \xi) + f(\xi)$$

και έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} \Big(\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\,(x - \xi)\Big) = f'(\xi) \cdot 0 = 0.$$

Εδώ ακριβώς χρησιμοποιούμε το ότι η $f'(\xi)$ είναι αριθμός, οπότε δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)\cdot 0$.
Άρα

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = 0 + f(\xi) = f(\xi)$$

και η f είναι συνεχής στο ξ. □

Τα επόμενα δυο παραδείγματα δείχνουν ότι, αν $f'(\xi) = \pm\infty$, τότε η f μπορεί να είναι αλλά μπορεί και να μην είναι συνεχής στο ξ.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Προφανώς, η f δεν είναι συνεχής στο 0. Όμως θα δούμε ότι η f έχει παράγωγο στο 0. Πράγματι,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Άρα $f'(0) = +\infty$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

Τώρα η f είναι συνεχής στο 0. Και

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} + \infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Άρα $f'(0) = +\infty$.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο 0 και

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{-\sqrt{-x}} - \infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$.
Προσέξτε, διότι το βιβλίο του Λυκείου αναφέρει ότι σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει *ευθεία* εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$ και ότι αυτή η ευθεία είναι κατακόρυφη. Αυτό είναι *λάθος*, διότι δεν υπάρχει παράγωγος στο 0. Το σωστό είναι ότι υπάρχει εφαπτόμενη *ημιευθεία* στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$ η οποία έχει κορυφή το σημείο $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη *προς τα πάνω*. Στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα, όπου $f'(0) = +\infty$, *υπάρχει* ευθεία εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$ και αυτή η ευθεία είναι κατακόρυφη.

Τώρα θα δούμε κι άλλα ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι περιττή, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x > 0$. Το γράφημά της στο $(-\infty, 0)$ είναι το συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$ του γραφήματός της στο $(0,+\infty)$. Στο $(0,+\infty)$ η f μηδενίζεται στα σημεία $\frac{1}{n\pi}$ για $n \in \mathbb{N}$. Τα σημεία αυτά τείνουν στο 0 από τα δεξιά του και ορίζουν τα διαδοχικά (από τα δεξιά προς τα αριστερά) διαστήματα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$, $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$, $(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi})$, $(\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi})$ κλπ. Τα διαστήματα αυτά προσεγγίζουν το 0 από τα δεξιά του. Στο πρώτο διάστημα η f είναι θετική, στο δεύτερο είναι αρνητική, στο τρίτο είναι θετική και, γενικότερα, αρχίζοντας από το πρώτο διάστημα όπου είναι θετική, περνώντας από κάθε διάστημα στο επόμενο διάστημα η f αλλάζει πρόσημο. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα περιττής τάξης (πρώτο, τρίτο, πέμπτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου η f έχει τιμή 1. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα άρτιας τάξης (δεύτερο, τέταρτο, έκτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου η f έχει τιμή -1. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Πάντως, όλες οι τιμές της f είναι ανάμεσα στο -1 και στο 1, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες $y = -1$ και $y = 1$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή -1 το γράφημά της ακουμπά την ευθεία $y = -1$ και στα σημεία όπου η f έχει τιμή 1 το γράφημά της ακουμπά την ευθεία $y = 1$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή 0 το γράφημά της τέμνει την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον x-άξονα.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0 = 0$. Όμως, αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι το όριο στο 0.

$$\text{Το} \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \text{δεν υπάρχει.}$$

Μάλιστα, κανένα από τα δυο πλευρικά όρια στο 0 δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το όριο $\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ υπήρχε και ήταν ίσο με $l \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n θα συνεπαγόταν ότι $\sin\frac{1}{x_n} \to l$. Όμως, θεωρώντας την ακολουθία με τύπο $x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ (τα σημεία όπου η f έχει τιμή 1), έχουμε ότι $\sin\frac{1}{x_n} = 1 \to 1$ και θεωρώντας την ακολουθία με τύπο $x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$ (τα σημεία όπου η f έχει τιμή -1), έχουμε ότι $\sin\frac{1}{x_n} = -1 \to -1$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, διότι το l δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα 1 και -1. Θεωρώντας τις αντίθετες ακολουθίες, αποδεικνύουμε ότι ούτε το $\lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$ υπάρχει.
Τώρα, αφού το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει, η f δεν είναι συνεχής στο 0. Άρα η f δεν

είναι ούτε παραγωγίσιμη στο 0. Μάλιστα είναι εύκολο να δει κανείς ότι δεν υπάρχει καν η $f'(0)$ δηλαδή το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι μια παραλλαγή αυτού που μόλις είδαμε. Προσέξτε τις διαφορές.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Η f είναι άρτια, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x>0$. Το γράφημά της στο $(-\infty,0)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματός της στο $(0,+\infty)$. Στο $(0,+\infty)$ η f μηδενίζεται στα σημεία $\frac{1}{n\pi}$ για $n\in\mathbb{N}$, όπως και η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος. Τα σημεία αυτά τείνουν στο 0 από τα δεξιά του και ορίζουν τα διαδοχικά (από τα δεξιά προς τα αριστερά) διαστήματα $(\frac{1}{\pi},+\infty)$, $(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi})$, $(\frac{1}{3\pi},\frac{1}{2\pi})$, $(\frac{1}{4\pi},\frac{1}{3\pi})$ κλπ. Τα διαστήματα αυτά προσεγγίζουν το 0 από τα δεξιά του. Στο πρώτο διάστημα η f είναι θετική, στο δεύτερο είναι αρνητική, στο τρίτο είναι θετική και, γενικότερα, αρχίζοντας από το πρώτο διάστημα όπου είναι θετική, περνώντας από κάθε διάστημα στο επόμενο διάστημα αλλάζει πρόσημο. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα περιττής τάξης (πρώτο, τρίτο, πέμπτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου ισχύει $f(x)=x$. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ για $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα άρτιας τάξης (δεύτερο, τέταρτο, έκτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου ισχύει $f(x)=-x$. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$ για $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Πάντως, για κάθε $x>0$ ισχύει $-x\leq f(x)\leq x$, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις διαγώνιες ευθείες $y=-x$ και $y=x$. Στα σημεία όπου $f(x)=-x$ το γράφημα της f ακουμπά την ευθεία $y=-x$ και στα σημεία όπου $f(x)=x$ το γράφημα της f ακουμπά την ευθεία $y=x$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή 0 το γράφημά της τέμνει την ευθεία $y=0$, δηλαδή τον x-άξονα.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0).$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Όμως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα

$$\text{το}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\quad \text{δεν υπάρχει.}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Η f είναι περιττή, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x>0$. Το γράφημά της στο $(-\infty,0)$ είναι το συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$ του γραφήματός της στο $(0,+\infty)$. Τώρα είναι προφανές ότι η f είναι περίπου όπως η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος. Τα διαστήματα στο $(0,+\infty)$ όπου η f είναι θετική ή αρνητική είναι ακριβώς τα ίδια και τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f είναι επίσης τα ίδια. Τα σημεία στα οποία η προηγούμενη συνάρτηση ήταν ίση με $-x$ ή x τώρα είναι τα σημεία στα

οποία ισχύει $f(x) = -x^2$ ή $f(x) = x^2$, αντιστοίχως. Τώρα ισχύει $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ για κάθε $x > 0$, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις παραβολές $y = -x^2$ και $y = x^2$. Στα σημεία όπου $f(x) = -x^2$ το γράφημα της f ακουμπά την παραβολή $y = -x^2$ και στα σημεία όπου $f(x) = x^2$ το γράφημα της f ακουμπά την παραβολή $y = x^2$.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} = +\infty$. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Τώρα η f είναι και παραγωγίσιμη στο 0 και

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να δούμε ότι *η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να μην είναι συνεχής*. Πράγματι, η παράγωγος της f που μελετάμε σ' αυτό το παράδειγα έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ και ότι το $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. (Το τελευταίο αποδεικνύεται όπως και το ότι το $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.) Άρα το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τις διάφορες απλές ιδιότητες των παραγώγων θα τις θεωρήσω γνωστές από πιο στοιχειώδη μαθήματα απειροστικού λογισμού και από το λύκειο.

Τώρα έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Το ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της f αν η τιμή $f(\xi)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση των τιμών της f κοντά στο ξ, δηλαδή αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Ομοίως για **σημείο τοπικού ελαχίστου**. Το ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

Το επόμενο ονομάζεται Θεώρημα του Fermat.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του A και σημείο τοπικού ακροτάτου της $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει παράγωγο στο ξ, τότε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή το ξ είναι αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του A, έχουμε

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{και} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Τώρα έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
Τότε για x κοντά στο ξ από δεξιά του ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ και $x > \xi$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } \xi \text{ από δεξιά του.}$$

Άρα

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$$

Για x κοντά στο ξ από αριστερά του ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ και $x < \xi$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } \xi \text{ από αριστερά του.}$$

Άρα

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Άρα

$$f'(\xi) = 0.$$

Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε ισχύουν τα προηγούμενα με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. $\square$

Το παράδειγμα της συνάρτησης $f(x) = |x|$ δείχνει ότι μπορεί ένα ξ (το $\xi = 0$ στο παράδειγμα) να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης και η συνάρτηση να μην έχει παράγωγο στο ξ.

Το θεώρημα του Fermat λέει ότι, αν η f έχει παράγωγο σε σημείο τοπικού ακροτάτου της το οποίο είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο του γραφήματός της είναι οριζόντια. Συνήθως, το θεώρημα του Fermat εφαρμόζεται με συνάρτηση f ορισμένη σε *διάστημα* A. Τότε ο ξ πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ώστε να είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του διαστήματος. Αν το ξ είναι μονόπλευρο σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A (για παράδειγμα, αν το A είναι διάστημα και το ξ είναι άκρο του A), τότε είναι φανερό από την παραπάνω απόδειξη (κρατώντας μόνο το μισό μέρος της απόδειξης) ότι, αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αυτή θα είναι ≥ 0 ή ≤ 0 ανάλογα με την περίπτωση, αλλά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε γενικά ότι $f'(\xi) = 0$.

Πάμε στο Θεώρημα του Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. *Πρώτη περίπτωση:* Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε ισχύει $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b)$.

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (ii) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.

(i) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται $f(\xi) > f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$.

(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται $f(\xi) < f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$. □

Το θεώρημα του Rolle λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι οριζόντια.

Τώρα έχουμε τα δυο Θεωρήματα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (υπάρχουν και τα Θεωρήματα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού). Το πιο συνηθισμένο είναι συνδεδεμένο με το όνομα του Lagrange και το άλλο με το όνομα του Cauchy.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$F(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο

$$F'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a)).$$

Βλέπουμε εύκολα ότι

$$F(a) = bf(a) - af(b), \qquad F(b) = bf(a) - af(b).$$

Άρα $F(a) = F(b)$ και από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $F'(\xi) = 0$, οπότε $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange που μόλις είδαμε λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να έχει ίδια κλίση (οπότε να είναι παράλληλη) με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$H(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Η H είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με παράγωγο

$$H'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι

$$H(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \qquad F(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

οπότε $H(a) = H(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $H'(\xi) = 0$ και, επομένως, συνεπάγεται ότι $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$. $\square$

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange και ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange είναι απλή εφαρμογή (με τη συνάρτηση $g(x) = x$) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy αποδείχτηκε ως εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα.*

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy φαίνεται αν υποθέσουμε ότι $g'(\xi) \neq 0$ και $g(a) \neq g(b)$. Τότε έχουμε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}},$$

οπότε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy λέει ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε ο λόγος των κλίσεων των εφαπτόμενων ευθειών στα γραφήματα των f και g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ να είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ η πρώτη και από τα σημεία $(a, g(a))$ και $(b, g(b))$ η δεύτερη.

Άσκηση 5.3.6. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δυο λύσεις, αν ο n είναι άρτιος, και το πολύ τρεις λύσεις, αν ο n είναι περιττός.*

Λύση: Έστω ότι ο n είναι άρτιος και έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις λύσεις, τις x_1, x_2, x_2 με

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^n + ax + b$$

και τότε από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ, η με

$$x_1 < \xi < x_2 < \eta < x_3$$

ώστε

$$f'(\xi) = 0, \qquad f'(\eta) = 0.$$

Όμως, έχουμε ότι

$$f'(x) = nx^{n-1} + a,$$

οπότε, επειδή ο $n-1$ είναι περιττός, η f' είναι γνησίως αύξουσα και καταλήγουμε σε άτοπο.
Τώρα, έστω ότι ο n είναι περιττός και έστω ότι η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις, τις x_1, x_2, x_2, x_4 με

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Για την ίδια συνάρτηση όπως πριν, από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ, η, ζ με

$$x_1 < \xi < x_2 < \eta < x_3 < \zeta < x_4$$

ώστε

$$f'(\xi) = 0, \qquad f'(\eta) = 0, \qquad f'(\zeta) = 0.$$

Πάλι από το Θεώρημα τοτ Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν k, l με

$$\xi < k < \eta < l < \zeta$$

ώστε

$$f''(k) = 0, \qquad f''(l) = 0.$$

Όμως,

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

οπότε, επειδή ο $n-2$ είναι περιττός, η f'' είναι γνησίως αύξουσα και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Άσκηση 5.3.21. [α] *Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2).$$

Λύση: Επειδή το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, συνεπάγεται ότι είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.
Έστω ότι έχουμε την πρώτη περίπτωση.
Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι η

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi-a) + f(a) < f(\xi),$$

οπότε
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in (a,\xi)$ ώστε
$$f'(\xi_2) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$
και, επομένως,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2).$$
Η εξίσωση της (ίδιας) ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ είναι η
$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-b)+f(b).$$
Με το ίδιο ξ έχουμε
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(\xi-b)+f(b) < f(\xi),$$
οπότε
$$\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in (\xi,b)$ ώστε
$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}$$
και, επομένως,
$$f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
Η λύση είναι όμοια στην περίπτωση που υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 5.3.15. *Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0.$$

Λύση: Θα εκμεταλλευτούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, γράφοντας

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi)(x+1-x) = f'(\xi) \tag{18}$$

για κάποιο ξ στο διάστημα $(x, x+1)$.

Μια "απλοϊκή" λύση είναι η εξής: όταν $x \to +\infty$, τότε $\xi \to +\infty$ (επειδή $x < \xi < x+1$), οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, $f'(\xi) \to 0$, οπότε $f(x+1) - f(x) \to 0$.

Αυτή η απόδειξη δεν είναι εντελώς αυστηρή διότι το ξ δεν είναι συνάρτηση του x με την αυστηρή έννοια (μπορεί στο ίδιο x να αντιστοιχούν παραπάνω από ένα ξ). Όμως, η ουσία της απόδειξης είναι σωστή και πολλές φορές αυτού του τύπου η απόδειξη είναι αποδεκτή.

Μια πιο "τυπική" απόδειξη είναι η εξής.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |f'(x)| < \epsilon.$$

Τώρα έστω $x > N$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\xi \in (x, x+1)$ για το οποίο ισχύει η (18). Τότε $\xi > N$ και, επομένως,

$$|f'(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα

$$|f(x+1) - f(x)| = |f'(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x+1) - f(x)| < \epsilon$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$.

Άσκηση 5.3.16. *Έστω f συνεχής στο $[a,b)$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} f'(x)$, αποδείξτε ότι η υπάρχει η $f'(a)$ και*

$$f'(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Λύση: Έστω

$$\lim_{x\to a+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση $l \in \mathbb{R}$. Οι περιπτώσεις $l = \pm\infty$ έχουν παρόμοια αντιμετώπιση.

Αν $x \in (a,b)$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \tag{19}$$

για κάποιο ξ στο διάστημα (a, x).

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to a+} f'(x) = l$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(x) - l| < \epsilon.$$

Τώρα έστω $a < x < a + \delta$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\xi \in (a, x)$ για το οποίο ισχύει η (19). Τότε $a < \xi < a + \delta$, οπότε

$$|f'(\xi) - l| < \epsilon.$$

Άρα

$$\Big|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\Big| = |f'(\xi) - l| < \epsilon.$$

Άρα

$$a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\Big| < \epsilon,$$

οπότε

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

και, επομένως, $f'(a) = l$.

Άσκηση 5.3.20. [α] *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I αν και μόνο αν ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.*

Λύση: Έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Παίρνουμε τυχαία x', x'' στο I.
Αν $x' = x''$, τότε η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ είναι προφανώς σωστή ($0 \leq 0$).
Αν $x' \neq x''$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x', x'']$ ή $[x'', x']$ και έχουμε ότι υπάρχει ξ στο εσωτερικό αυτού του διαστήματος και, επομένως, στο εσωτερικό του διαστήματος I ώστε

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(\xi).$$

Άρα

$$\Big|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\Big| = |f'(\xi)| \leq M$$

και, επομένως, ισχύει η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.
Έστω x στο εσωτερικό του I και οποιοδήποτε $t \in I, t \neq x$, οπότε

$$\Big|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\Big| \leq M.$$

Επειδή

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x),$$

συνεπάγεται

$$\lim_{t \to x} \Big|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\Big| = |f'(x)|,$$

και επομένως

$$|f'(x)| \leq M.$$

Τώρα έχουμε την Πρόταση 5.6 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.*
[α] Η f είναι σταθερή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
[β] Η f είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
[γ] Η f είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι σταθερή στο I, τότε ισχύει

$$f(x) = c$$

για κάθε x στο I, όπου c είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του x. Τότε

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{c - c}{t - x} = \lim_{t \to x} 0 = 0$$

για κάθε x στο I.
Η απόδειξη είναι υπερβολικά απλή και την έκανα για να την αντιδιαστείλω με την απόδειξη του αντιστρόφου, η οποία είναι εξαιρετικά δύσκολη! Η απόδειξη του αντίστροφου χρησιμοποιεί το Θέωρημα Μέσης Τιμής, το οποίο για να αποδειχθεί χρησιμοποιεί το Θεώρημα του Fermat αλλά και το Θεώρημα του Rolle, το οποίο χρησιμοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, το οποίο χρησιμοποιεί το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, το οποίο χρησιμοποιεί το Θέωρημα για όρια Μονότονων Ακολουθιών, το οποίο χρησιμοποιεί την Ιδιότητα Supremum!
Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Έστω a, b στο I με $a < b$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[a, b]$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ξ στο (a, b) και επομένως στο εσωτερικό του I ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Όμως, $f'(\xi) = 0$ και άρα

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Άρα ισχύει $f(a) = f(b)$ για κάθε $a, b \in I$ και έτσι η f είναι σταθερή στο I.
Οι αποδείξεις των [β] και [γ] είναι παρόμοιες. Δείτε τις στο βιβλίο. □

Δείτε και την Πρόταση 5.7 στο βιβλίο για γνήσια μονοτονία συναρτήσεων σε διαστήματα.

Πέρα από την χρηση της παραγώγου για μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης (κάτι που έχετε δει κατά κόρον στο Λύκειο), υπάρχει και η χρήση της παραγώγου για την απόδειξη ανισοτήτων.

Άσκηση 5.4.14. *Αποδείξτε ότι ισχύει*

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x \qquad \text{για } x > 0.$$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \arctan x - x.$$

Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \qquad \text{για } x \neq 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ και, επομένως, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$\arctan x - x = f(x) < f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και επομένως

$$\arctan x < x \qquad \text{για } x > 0.$$

(Χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Το ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(-\infty, 0]$ χρησιμοποιείται για να δούμε ποιά ανισότητα ισχύει για $x < 0$.)

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}.$$

Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0 \qquad \text{για } x \neq 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ και, επομένως, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$\arctan x - x + \frac{x^3}{3} = f(x) > f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και επομένως

$$\arctan x > x - \frac{x^3}{3} \qquad \text{για } x > 0.$$

Άσκηση 5.4.19. *Έστω $0 < a < b$ και $x \geq -a$, $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^a < \left(1 + \frac{x}{b}\right)^b. \tag{20}$$

Λύση: Η (20) μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους. Εδώ θα προσπαθήσω να σας δείξω πώς μπορούμε να απλοποιήσουμε πρώτα την ανισότητα και, αφού την γράψουμε σε μια απλούστερη (αλλά ισοδύναμη) μορφή, μετά να εφαρμόσουμε τεχνικές με παραγώγους για να αποδείξουμε την απλοποιημένη ανισότητα.

Γράφουμε την (20) ισοδύναμα

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{b}} < 1 + \frac{x}{b}$$

και, αφού κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$t = \frac{x}{a},$$

η νέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$(1+t)^{\frac{a}{b}} < 1 + \frac{a}{b}\, t.$$

Τέλος, αν θέσουμε

$$k = \frac{a}{b},$$

η ανισότητα παίρνει την τελική ισοδύναμη μορφή

$$(1+t)^k < 1 + kt. \tag{21}$$

Πρέπει να γράψουμε και τις συνθήκες $0 < a < b$ και $x \geq -a$, $x \neq 0$ σε ισοδύναμη μορφή με τις νέες παραμέτρους k και t. Αυτό είναι εύκολο:

$$0 < k < 1, \; t \geq -1, \; t \neq 0.$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = (1+t)^k - 1 - kt.$$

Είναι

$$f'(t) = k(1+t)^{k-1} - k = k\big((1+t)^{k-1} - 1\big).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f'(t) \begin{cases} > 0, & \text{αν } -1 < t < 0 \\ = 0, & \text{αν } t = 0 \\ < 0, & \text{αν } 0 < t \end{cases}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$f(t) < f(0) = 0 \qquad \text{για } t \geq -1, t \neq 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η (21) και επομένως η ισοδύναμη (20).

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **κυρτή** στο διάστημα I αν ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{22}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε t με $0 < t < 1$.
Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα (22), τότε λέμε ότι η f είναι **κοίλη** στο διάστημα I.
Επίσης, αν η ανισότητα (22) είναι γνήσια, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως κυρτή** στο I και, αν ισχύει η γνήσια αντίθετη ανισότητα (22), τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως κοίλη** στο I.

Παράδειγμα. Κάθε συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \mu x + \nu$$

είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, έχουμε

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \mu((1-t)x_1 + tx_2) + \nu = (1-t)\mu x_1 + t\mu x_2 + \nu$$

και

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= (1-t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu)\\ &= (1-t)\mu x_1 + (1-t)\nu + t\mu x_2 + t\nu = (1-t)\mu x_1 + t\mu x_2 + \nu.\end{aligned}$$

Άρα

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

οπότε ισχύει και η (22) και η αντίθετη (22) και άρα η f είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Τώρα, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή και το ότι $0 < t < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}f((1-t)x_1 + tx_2) &= |(1-t)x_1 + tx_2| \leq |(1-t)x_1| + |tx_2| = (1-t)|x_1| + t|x_2|\\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2).\end{aligned}$$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση

$$f(x) = x^2$$

είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Η ανισότητα που έχουμε να αποδείξουμε είναι η

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

ή, ισοδύναμα,

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 < (1-t){x_1}^2 + t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1-t)^2{x_1}^2+2(1-t)tx_1x_2+t^2{x_2}^2<(1-t){x_1}^2+t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$2(1-t)tx_1x_2<(1-t)t{x_1}^2+(1-t)t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα, (επειδή $0<t<1$)

$$2x_1x_2<{x_1}^2+{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$0<(x_1-x_2)^2$$

το οποίο ισχύει, διότι $x_1<x_2$.

Τώρα θα μετασχηματίσουμε την ανισότητα (22) σε μια λίγο διαφορετική αλλά ισοδύναμη μορφή και με βάση αυτήν την νέα μορφή θα δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της κυρτότητας και θα αναπτύξουμε κριτήρια για να αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή.

Κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής από t σε x, θέτοντας

$$x=(1-t)x_1+tx_2.$$

Αν λύσουμε ως προς t, βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης αλλαγής μεταβλητής:

$$t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Και τώρα είναι φανερή η ισοδυναμία

$$0<t<1 \quad\Leftrightarrow\quad x_1<x<x_2.$$

Παρατηρούμε ότι το $t=0$ είναι ισοδύναμο με το $x=x_1$ και το $t=1$ είναι ισοδύναμο με το $x=x_2$. Επίσης, αν το t αυξάνεται από το 0 στο 1, τότε το x αυξάνεται από το x_1 στο x_2 και, αντιστρόφως, αν το x αυξάνεται από το x_1 στο x_2, τότε το t αυξάνεται από το 0 στο 1.

Τώρα θα ξαναγράψουμε την ανισότητα (22) αντικαθιστώντας την μεταβλητή t με την μεταβλητή x. Βοηθητικά, παρατηρήστε ότι

$$1-t=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}.$$

Και τώρα η (22) γράφεται ισοδύναμα

$$f(x)\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \tag{23}$$

για κάθε $x_1,x_2\in I$ με $x_1<x_2$ και για κάθε x με $x_1<x<x_2$.
Άρα, αν ισχύει η (23), τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα I. Αν ισχύει η γνήσια ανισότητα (23), η f είναι γνησίως κυρτή και, αν ισχύει η αντίθετη (23) ή η γνήσια αντίθετη (23), τότε η f είναι κοίλη ή γνησίως κοίλη στο I.

Από την ανισότητα (23) προκύπτει το γεωμετρικό περιεχόμενο της ένοιας της κυρτότητας.

Για να το δούμε θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Μετά από λίγες πράξεις ο τύπος γράφεται και

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

και βλέπουμε ότι το γράφημα της g είναι ευθεία με κλίση $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Από τον αρχικό τύπο της g βλέπουμε αμέσως ότι $g(x_1) = f(x_1)$ και $g(x_2) = f(x_2)$. Άρα το γράφημα της g είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Τώρα, η ανισότητα (23) γράφεται

$$f(x) \leq g(x)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x με $x_1 < x < x_2$. Και αυτό μεταφράζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο εξής: "για κάθε x στο διάστημα (x_1, x_2) το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται κάτω (με την ευρεία έννοια) από το σημείο $(x, g(x))$" ή, με άλλα λόγια, "το μέρος του γραφήματος της f που αντιστοιχεί στο διάστημα (x_1, x_2) βρίσκεται κάτω (με την ευρεία έννοια) από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$". Αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα. Είναι οι Προτάσεις 5.12 και 5.13 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο εσωτερικό του I.*

[β] *Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. Θα δούμε μόνο την απόδειξη για την κυρτότητα. Όλα τα άλλα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I.

Θεωρούμε τυχαία $x, x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x < x_2$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[x_1, x]$ και $[x, x_2]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x_2)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Επειδή η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I και επειδή τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν στο εσωτερικό του I και $\xi_1 < \xi_2$, συνεπάγεται

$$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2),$$

οπότε

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

οπότε η f είναι κυρτή στο I.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Έστω τυχαία x_1, x_2 στο εσωτερικό του I με $x_1 < x_2$. (Θα δείξουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.)

Από την βασική ανισότητα (2), αφαιρώντας $f(x_1)$ από τα δύο μέλη της, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Τώρα, αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε x στο διάστημα (x_1, x_2) και, παίρνοντας όριο όταν $x \to x_1+$, βρίσκουμε ότι

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο (αφαιρώντας από την (2) το $f(x_2)$ κλπ), βρίσκουμε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Από τις δυο τελευταίες ανισότητες έχουμε

$$f'(x_1 \leq f'(x_2)$$

και τελειώσαμε. □

Από την Πρόταση αυτή προκύπτει ένας ακόμη γεωμετρικός χαρακτηρισμός της έννοιας της κυρτότητας για συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του I. Το ότι η f είναι κυρτή στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της τελευταίας Πρότασης.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.*

[β] *Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο I.*

Απόδειξη. Προφανής. □

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 5.5.10. *Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)=0$ και αν υπάρχει $c\in(a,b)$ ώστε $f(c)>0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f''(\xi)<0$.*

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[a,c]$ και $[c,b]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(a,c)$ και $\xi_2\in(c,b)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0, \qquad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0.$$

Τέλος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ και, επομένως, $\xi\in(a,b)$ ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

Άσκηση 5.5.12. *Έστω f συνεχής στο $[-1,1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Αν $f(-1)=f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f'(0)=0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'''(\xi)=3$.*

Λύση: Θα βρούμε πρώτα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

τέτοιο ώστε

$$p(-1)=p(0)=0,\ p(1)=1,\ p'(0)=0.$$

Οι τέσσερις αυτές συνθήκες μας δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:

$$-a+b-c+d=0,\ d=0,\ a+b+c+d=1,\ c=0.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε

$$a=b=\frac{1}{2},\ c=d=0.$$

Άρα το πολυώνυμο που ζητάμε είναι το

$$p(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2.$$

Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x)=f(x)-p(x).$$

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$g(-1)=g(0)=g(1)=0,\ g'(0)=0.$$

Τώρα εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$ ώστε

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[\xi_1, 0]$ και $[0, \xi_2]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\eta_1 \in (\xi_1, 0)$ και $\eta_2 \in (0, \xi_2)$ ώστε

$$g''(\eta_1) = g''(\eta_2) = 0.$$

Τέλος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα (η_1, η_2) και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ και, επομένως, $\xi \in (-1, 1)$ ώστε

$$g'''(\xi) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$f'''(\xi) - p'''(\xi) = 0,$$

οπότε

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 3.$$

Άσκηση 5.5.11. *Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και έστω ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν η εξίσωση $f(x)f'(x) = 0$ έχει δυο λύσεις στο (a, b), να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα σ' αυτές τις δυο λύσεις.*

Λύση: Έστω x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ οι δυο λύσεις της $f(x)f'(x) = 0$. Δηλαδή

$$f(x_1)f'(x_1) = f(x_2)f'(x_2) = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = f(x)f'(x) \qquad \text{για } x \in (a, b).$$

Έχουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2 \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in (a, b),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο (a, b). Όμως,

$$g(x_1) = g(x_2) = 0,$$

οπότε η g είναι σταθερή

$$g(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

και αυτό σημαίνει ότι ισχύει

$$\big(f^2(x)\big)' = 2f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Άρα η συνάρτηση f^2 είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή ισχύει

$$f^2(x) = c \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

για κάποια σταθερά $c \geq 0$.
Τώρα, εκμεταλλευόμενοι την συνέχεια της f στο $[x_1, x_2]$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Πρώτη περίπτωση: Έστω $c = 0$.
Τότε, προφανώς, ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, οπότε η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $c > 0$.
Τώρα συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) = +\sqrt{c} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Όμως, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[x_1, x_2]$, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, x_2]$. Άρα είτε ισχύει

$$f(x) = +\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

είτε ισχύει

$$f(x) = -\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Και θα τελειώσουμε αποδεικνύοντας τον Πρώτο Κανόνα του L' Hopitâl.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα (ξ, a) και έστω ότι $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, a)$ και*

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0.$$

Αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε υπάρχει και το

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$

και

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς ορίζουμε

$$f(\xi) = g(\xi) = 0$$

οπότε έτσι οι συναρτήσεις f, g θεωρούνται ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\xi, a)$. Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, a)$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy στο διάστημα $[\xi, x]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{24}$$

Και τώρα θα γράψουμε για συντομία

$$l = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

και θα υποθέσουμε ότι

$$l \in \mathbb{R}.$$

Θα αποδείξουμε ότι
$$\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$
Έστω $\epsilon>0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε
$$\xi<x<\xi+\delta \quad\Rightarrow\quad \Big|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\Big|<\epsilon. \tag{25}$$
Τέλος, έστω $\xi<x<\xi+\delta$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\eta\in(\xi,x)$ για το οποίο ισχύει η (24). Παρατηρούμε ότι $\xi<\eta<\xi+\delta$, οπότε από την (25) (με $x=\eta$) συνεπάγεται
$$\Big|\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}-l\Big|<\epsilon.$$
Άρα, από την (24) έχουμε
$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-l\Big|<\epsilon.$$
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε
$$\xi<x<\xi+\delta \quad\Rightarrow\quad \Big|\frac{f(x)}{g(x)}-l\Big|<\epsilon.$$
Αυτό σημαίνει ότι
$$\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$
□

Μπορείτε να διαβάσετε στο βιβλίο και τις άλλες περιπτώσεις για τον Πρώτο Κανόνα του L' Hopitâl καθώς και τον Δεύτερο Κανόνα του L' Hopitâl, του οποίου η απόδειξη είναι αρκετά πιο δύσκολη.