ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 5-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 2.3.33. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $> \sup A$ αλλά και ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $\sup A$.*

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $> \sup A$ αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση που το $\sup A$ είναι αριθμός (δηλαδή, που το A είναι άνω φραγμένο). Διότι στην περίπτωση $\sup A = +\infty$ είναι προφανές ότι δεν μπορεί να υπάρχει ακολουθία με όριο $> +\infty$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $x > \sup A$. Επειδή ισχύει $x_n \in A$ για κάθε n, ισχύει και $x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Και, επειδή $x_n \to x$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων συνεπάγεται $x \leq \sup A$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $> \sup A$.
Μια άλλη διατύπωση του ίδιου συλλογισμού είναι η εξής. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο A με όριο x. (Δεν υποθέτουμε τίποτα για τη σχέση του x με το $\sup A$.) Επειδή ισχύει $x_n \in A$ για κάθε n, ισχύει και $x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Και, επειδή $x_n \to x$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων συνεπάγεται $x \leq \sup A$. Άρα κάθε ακολουθία στο A η οποία έχει όριο έχει το όριό της $\leq \sup A$. Άρα δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $> \sup A$.
Τώρα στο δεύτερο μέρος. Θα χρειαστεί να διακρίνουμε περιπτώσεις: το $\sup A$ είναι $+\infty$ ή αριθμός.
Έστω $\sup A = +\infty$, οπότε το A δεν είναι άνω φραγμένο.
Χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.

Προκαταρκτικές σκέψεις:
Το πρόβλημα είναι ότι δεν "γνωρίζουμε" το σύνολο A, οπότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε (σχεδιάζοντας, ίσως, το A) κάποια συγκεκριμένη ακολουθία στο A η οποία τείνει στο $+\infty$. Ούτε μπορούμε να πάρουμε κάποια συγκεκριμένη γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, για παράδειγμα την (n), διότι δεν γνωρίζουμε αν οι όροι της είναι στοιχεία του άγνωστου συνόλου A. Αναγκαστικά, η λύση θα έχει "υπαρξιακό χαρακτήρα". Θα αποδείξουμε ότι αυτό που ζητάμε "υπάρχει" χωρίς να μπορούμε να το καταδείξουμε (με τύπο για παράδειγμα). Το ίδιο είχε γίνει στην προηγούμενη διάλεξη με την άσκηση 2.3.32.
Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, ακόμη κι αν αυτή δεν είναι στο A, και μετά, βασισμένοι στο ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο, θα "βρούμε" μια άλλη ακολουθία *στο* A η οποία θα είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη και, επομένως, θα είναι αναγκασμένη να τείνει κι αυτή στο $+\infty$.
Ακριβώς την ίδια ιδέα χρησιμοποιήσαμε και στην άσκηση 2.3.32. Πήραμε τις δυο ακολουθίες $(x - \frac{1}{n})$ και $(x + \frac{1}{n})$, οι οποίες τείνουν στον x, (χωρίς να μας ενδιαφέρει αν οι όροι τους είναι ρητοί) και ανάμεσά τους "εγκλωβίσαμε" μια ακολουθία ρητών (r_n), βασισμένοι στην πυκνότητα των ρητών. Επειδή και οι δυο αυτές ακολουθίες τείνουν στον x, η (r_n) αναγκάζεται να τείνει κι αυτή στον x.

Συνεχίζουμε με την λύση.
Θεωρούμε την ακολουθία (n) η οποία έχει όριο $+\infty$. Επειδή το A δεν είναι άνω φραγμένο, για κάθε n υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A το οποίο είναι $> n$. Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$x_n > n.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $x_n > n$ για κάθε n. Επειδή $n \to +\infty$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.
Τώρα, έστω ότι το $\sup A$ είναι αριθμός, οπότε το A είναι άνω φραγμένο.

(Οδηγούμενοι από τις παραπάνω σκέψεις, θα θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε γνωστή ακολουθία οι όροι της οποίας αυξάνονται και τείνουν στο sup A, χωρίς να μας νοιάζει αν ανήκουν στο A, και ανάμεσα σ' αυτήν την ακολουθία και στο sup A θα "εγκλωβίσουμε" μια ακολουθία στο A.)
Θεωρούμε την ακολουθία $(\sup A - \frac{1}{n})$ η οποία τείνει στο sup A και όλοι οι όροι της είναι $< \sup A$. Από μια χαρακτηριστική ιδιότητα του sup A συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι πιο κοντά στο sup A από τον αριθμό $\sup A - \frac{1}{n}$.
Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \le \sup A.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $\sup A - \frac{1}{n} < x_n \le \sup A$ για κάθε n. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $x_n \to \sup A$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο sup A.

Συνεχίζουμε με θεωρία.

ΕΓΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ. *Έστω ακολουθία διαστημάτων*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots .$$

Υποθέτουμε ότι τα διαστήματα είναι "εγκιβωτισμένα", δηλαδή ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *για κάθε* n. *Τότε οι ακολουθίες* (a_n), (b_n) *συγκλίνουν και υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα.*

Απόδειξη. Σχεδιάζουμε πρόχειρα τα διαστήματα:

Παρατηρούμε αμέσως ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και ότι η (b_n) είναι φθίνουσα. Άρα η (a_n) έχει όριο αριθμό ή $+\infty$ και η (b_n) έχει όριο αριθμό ή $-\infty$. Βλέπουμε, όμως, ότι η (a_n) είναι και άνω φραγμένη από τον b_1 και ότι η (b_n) είναι κάτω φραγμένη από τον a_1. Άρα οι (a_n), (b_n) έχουν και οι δυο όρια αριθμούς.
Έστω, λοιπόν,

$$a_n \to a \qquad \text{και} \qquad b_n \to b.$$

Κατόπιν, επειδή ισχύει

$$a_n \le b_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται

$$a \le b.$$

Μια σκέψη:
Και τα δυο ενδεχόμενα, $a = b$ και $a < b$, είναι δυνατά. Θεωρήστε για παράδειγμα τα διαστήματα $[2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$, από τα οποία προκύπτει $a = b = 2$, και τα διαστήματα $[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}]$, από τα οποία προκύπτει $a = 2$ και $b = 3$.

Μάλιστα, επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_n \le a \qquad \text{και} \qquad b \le b_n$$

για κάθε n.
Με βάση τα νέα στοιχεία, ξανασχεδιάζουμε:

Επομένως, αποδείξαμε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν αλλά και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα. Αυτοί οι αριθμοί είναι, προφανώς, όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $[a, b]$. $\square$

Μερικά ακόμη συμπεράσματα στο Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων.

(1) Αν $a = b$, τότε το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο και ο μοναδικός αριθμός x που ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα είναι ο $x = a = b$. Αν, όμως, $a < b$, τότε υπάρχουν άπειροι αριθμοί που καθένας τους ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα: όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $[a, b]$ που τώρα δεν είναι μονοσύνολο.

(2) Υπάρχει ένα κριτήριο το οποίο μας λέει πότε υπάρχει ακριβώς ένας x ο οποίος ανήκει σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα και πότε υπάρχουν περισσότεροι από ένας τέτοιοι x. Το κριτήριο αυτό έχει να κάνει με τα μήκη $b_n - a_n$ των εγκιβωτισμένων διαστημάτων. Συγκεκριμένα: επειδή $b_n - a_n \to b - a$,
(i) αν $b_n - a_n \to 0$, τότε $b - a = 0$, οπότε $b = a$ και υπάρχει μόνο ένας x κοινός σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.
(ii) αν $b_n - a_n \not\to 0$, τότε $b - a \neq 0$, οπότε $b \neq a$ (δηλαδή $a < b$) και υπάρχουν άπειροι x κοινοί σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

(3) Η ακολουθία $(b_n - a_n)$ των μηκών των εγκιβωτισμένων διαστημάτων συγκλίνει στο $b - a$, δηλαδή στο μήκος του διαστήματος που περιέχει ακριβώς τους αριθμούς τους κοινούς σε όλα τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

(4) Το διάστημα $[a, b]$ είναι η *τομή* όλων των εγκιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$.