ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 5-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Είδαμε στο προηγούμενο μάθημα ότι για να έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x \to \xi} f(x)$$

πρέπει το ξ να είναι σε κατάλληλη θέση σε σχέση με το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. Δηλαδή πρέπει το ξ να μπορεί να προσεγγισθεί από στοιχεία x του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Αυτό το εκφράζουμε με μαθηματικό τρόπο, λέγοντας ότι το ξ πρέπει να είναι σημείο συσσώρευσης του A: σε κάθε περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, πρέπει να υπάρχουν στοιχεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Όταν λέμε περιοχή του ξ εννοούμε διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ αν $\xi \in \mathbb{R}$, διάστημα $(M, +\infty]$ αν $\xi = +\infty$ και διάστημα $[-\infty, -M)$ αν $\xi = -\infty$.

Ανάλογα μπορούμε να σκεφτούμε για τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$, δηλαδή τα

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \xi+} f(x) = \eta.$$

Το $\lim_{x \to \xi+} f(x) = \eta$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, \xi < x < \xi + \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

Και το $\lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, \xi - \delta < x < \xi \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \epsilon.$$

Σ' αυτά τα όρια παίζουν ρόλο οι λεγόμενες **πλευρικές περιοχές**

$$N_{\xi-}(\delta) = (\xi - \delta, \xi], \qquad N_{\xi+}(\delta) = [\xi, \xi + \delta).$$

Και, ανάλογα, για να έχουν νόημα αυτά τα δυο όρια πρέπει το ξ να είναι από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή, για να έχει νόημα το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ πρέπει να μπορεί να προσεγγισθεί το ξ από αριστερά του με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ. Και για να έχει νόημα το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ πρέπει να μπορεί να προσεγγισθεί το ξ από δεξιά του με σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το ξ.

Και για να μην γίνει παρανόηση: το ξ πρέπει να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f για να έχει νόημα το $\lim_{x \to \xi} f(x)$. Όμως, *το να έχει νόημα το όριο δεν συνεπάγεται ότι το όριο υπάρχει.* Για παράδειγμα, το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{x}$, δηλαδή της ένωσης $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, και επομένως έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά είναι διαφορετικά:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Παρατηρήστε ότι το 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, οπότε έχουν νόημα και τα δυο πλευρικά όρια.

Για να μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα κάποιες ιδιότητες των ορίων, θα ορίσουμε τώρα κάποιες απλές σχετικές έννοιες.

Ας υποθέσουμε ότι μιλάμε για κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα η οποία έχει νόημα σε ένα σύνολο A και είναι αληθής για κάποια $x \in A$ και ψευδής για τα υπόλοιπα $x \in A$. Για παράδειγμα η ανισότητα $\sqrt{x} > 1$ έχει νόημα στο σύνολο $A = [0, +\infty)$, είναι αληθής για $x \in (1, +\infty)$ και ψευδής για $x \in [0, 1]$. Όταν μια ιδιότητα αναφέρεται σε μια συνάρτηση f τότε το σύνολο στο οποίο έχει νόημα είναι το πεδίο ορισμού της f.

Όταν λέμε ότι η ιδιότητα (που έχει νόημα στο σύνολο A) **ισχύει κοντά** στο ξ εννοούμε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και ότι η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A$ που ανήκει σε κάποια περιοχή του ξ και είναι διαφορετικό από το ίδιο το ξ.

Όταν λέμε ότι η ιδιότητα (που έχει νόημα στο σύνολο A) **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά** στο ξ εννοούμε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και ότι σε κάθε περιοχή του ξ, οσοδήποτε μικρή, η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον ένα $x \in A$ διαφορετικό από το ίδιο το ξ.

Για παράδειγμα, η ανισότητα

$$\frac{1}{x} > 3$$

έχει νόημα στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει στο διάστημα $(0, \frac{1}{3})$. Άρα είναι λάθος να πούμε ότι η ανισότητα ισχύει κοντά στο 0, διότι δεν υπάρχει καμία περιοχή $(-\delta, \delta)$ τέτοια ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap (-\delta, \delta)$. Βέβαια, μπορούμε να πούμε ότι η ίδια ανισότητα ισχύει κοντά στο 0 από τα δεξιά του, διότι υπάρχει η δεξιά περιοχή $[0, \frac{1}{3})$ του 0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap [0, \frac{1}{3})$.

Τώρα, η ανισότητα

$$\frac{1}{|x|} > 3$$

έχει νόημα στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει στο $(-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$. Άρα η ανισότητα ισχύει κοντά στο 0, διότι υπάρχει η περιοχή $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ του 0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $x \in A \cap (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ανισότητα

$$\sin x > \frac{1}{2},$$

η οποία έχει νόημα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, η ανισότητα ισχύει για παράδειγμα στα σημεία $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και, επομένως, για κάθε $N > 0$, όσο θέλουμε μεγάλο, υπάρχει τουλάχιστον ένα x στο $(N, +\infty)$ για το οποίο η ανισότητα ισχύει. Από την άλλη μεριά είναι λάθος να πούμε ότι η ανισότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$, διότι δεν υπάρχει κανένα $N > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε x στο $(N, +\infty)$.

Τέλος, η ανισότητα

$$\frac{1}{x} < 0.0001$$

ισχύει για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (10000, +\infty)$ και επομένως ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Και τώρα θα αναφέρω μερικές μόνο ιδιότητες των ορίων. Δεν θα αναπτύξω συστηματικά τις ιδιότητες των ορίων, διότι υποθέτω ότι έχουν μελετηθεί σε προηγούμενο μάθημα απειροστικού λογισμού. Για να τις θυμηθείτε, διαβάστε προσεκτικά ολόκληρη την ενότητα 3.3 του βιβλίου μαζί με τα παραδείγματα που περιέχονται σ' αυτήν.

Μια ιδιότητα είναι η εξής. (Δείτε την Πρόταση 3.4 του βιβλίου.)

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\eta < u$, τότε ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.

Για να αποδείξουμε αυτήν την ιδιότητα, θέτουμε $\epsilon = u - \eta > 0$ και θεωρούμε την περιοχή $(\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ η οποία, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του ϵ, βρίσκεται ολόκληρη αριστερά του u. Τώρα, επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει (για κάθε $\epsilon > 0$ και επομένως και) για τον συγκεκριμένο ϵ κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, x \in (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon) \quad \Rightarrow \quad f(x) < u.$$

Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στο ξ.

Μια άλλη ιδιότητα είναι η εξής. (Δείτε την Πρόταση 3.6 του βιβλίου.)

Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$*, τότε η* f *είναι φραγμένη κοντά στο* ξ*.*

Μια άλλη ιδιότητα είναι η **ιδιότητα παρεμβολής** (η Πρόταση 3.10 του βιβλίου):

Αν ισχύει $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *κοντά στο* ξ *και αν υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *και* $\lim_{x\to\xi} h(x)$ *και είναι ίσα, τότε υπάρχει και το όριο* $\lim_{x\to\xi} g(x)$ *και είναι ίσο με τα δυο προηγούμενα όρια.*

Για παράδειγμα, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το όριο στο 0 της συνάρτησης $\sqrt{x \sin\frac{1}{x}}$ την οποία συναντήσαμε στο προηγούμενο μάθημα και έχει, όπως είδαμε, ένα περίπλοκο πεδίο ορισμού. Βλέπουμε ότι ισχύει

$$0 \le \sqrt{x \sin\frac{1}{x}} \le \sqrt{|x|}$$

κοντά στο 0 και, επειδή $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ και $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x \sin\frac{1}{x}} = 0.$$

Και τώρα ερχόμαστε σε ένα σημαντικό Θεώρημα, το Θεώρημα 3.1 στο βιβλίο. *Το Θεώρημα αυτό "συσχετίζει" την έννοια του ορίου συνάρτησης με την έννοια του ορίου ακολουθίας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και σημείο συσσώρευσης* ξ *του* A*. Θεωρούμε όλες τις ακολουθίες* (x_n) *στο σύνολο* A *με τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) $x_n \neq \xi$ *για κάθε* n*,*
(ii) $x_n \to \xi$*.*
Τότε:
[α] *Αν* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$*, τότε για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* A *με τις ιδιότητες* (i)*,* (ii) *ισχύει* $f(x_n) \to \eta$*.*
[β] *Αν για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* A *με τις ιδιότητες* (i)*,* (ii) *η αντίστοιχη ακολουθία* $\big(f(x_n)\big)$ *έχει όριο, τότε υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to\xi} f(x)$*.*

Θα δούμε την απόδειξη στο επόμενο μάθημα. Ας δούμε όμως πώς εφαρμόζουμε το [α] του Θεωρήματος. Αυτό που κάνουμε είναι ότι, αν γνωρίζουμε το όριο κάποιας κατάλληλης συνάρτησης, βγάζουμε συμπέρασμα για το όριο ακολουθίας.

Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Αν τώρα έχουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $x_n \to 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι ${x_n}^2 \to 0$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εξής. Γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Αν πάρουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{n^2+3n+1}{2n^2+4}$, τότε έχουμε ότι ισχύει $x_n \neq \frac{1}{2}$ για κάθε n και $x_n \to \frac{1}{2}$. Άρα συνεπάγεται

$$e^{\frac{n^2+3n+1}{2n^2+4}} = e^{x_n} \to e^{\frac{1}{2}}.$$