ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ, 6-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος που διατυπώσαμε στο τέλος του προηγούμενου μαθήματος.

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

Τώρα θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες
(i) $x_n \neq \xi$ για κάθε n
(ii) $x_n \to \xi$
και θα αποδείξουμε ότι

$$f(x_n) \to \eta.$$

Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta \in \mathbb{R}$. Οι άλλες περιπτώσεις έχουν παρόμοια απόδειξη.
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει κάποιο κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x-\xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-\eta| < \epsilon. \tag{1}$$

Τώρα, επειδή η ιδιότητα (ii) λέει ότι $x_n \to \xi$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_n - \xi| < \delta.$$

Επίσης, από την ιδιότητα (i) έχουμε ότι ισχύει $0 < |x_n - \xi|$ για κάθε n και, επομένως, ισχύει τελικά

$$0 < |x_n - \xi| < \delta.$$

Άρα από την (1) συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|f(x_n) - \eta| < \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|f(x_n) - \eta| < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to \eta$.
Στην απόδειξη του [β] θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ. *Έστω σύνολο A και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες*
(i) $x_n \neq \xi$ *για κάθε* n
(ii) $x_n \to \xi$.

Απόδειξη. Θα δούμε την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την περιοχή $(\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n})$ του ξ. Επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, συνεπάγεται ότι υπάρχει στην περιοχή αυτή σημείο x_n του A, διαφορετικό από το ξ. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n (δηλαδή η ιδιότητα (i)) και $\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $x_n \to \xi$ (δηλαδή η ιδιότητα (i)). $\square$

[β] Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) (που μόλις αποδείξαμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τέτοια ακολουθία) ισχύει ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ έχει κάποιο όριο.
Και πάλι θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου $\xi \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε δυο ακολουθίες (x'_n) και (x''_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Σχηματίζουμε την "μικτή" ακολουθία

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, x'_4, x''_4, \ldots .$$

Είναι φανερό ότι και αυτή η ακολουθία έχει τις ιδιότητες (i) και (ii). Πράγματι, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και συγκλίνει στο ξ, διότι οι υποακολουθίες της των περιττών δεικτών και των άρτιων δεικτών ταυτίζονται με τις (x'_n) και (x''_n), αντιστοίχως, οι οποίες συγκλίνουν στο ξ.
Λόγω της υπόθεσής μας, η αντίστοιχη ακολουθία

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), f(x'_3), f(x''_3), f(x'_4), f(x''_4), \ldots$$

έχει όριο.
Άρα οι ακολουθίες $\big(f(x'_n)\big)$ και $\big(f(x''_n)\big)$ έχουν το ίδιο όριο, διότι είναι οι υποακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών της τελευταίας ακολουθίας.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) ισχύει ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ έχει κάποιο όριο και ότι *το όριο αυτό της $\big(f(x_n)\big)$ δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη (x_n) που θεωρούμε κάθε φορά.*
Ονομάζοντας η αυτό το κοινό όριο, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει κάποιο η το οποίο είναι το κοινό όριο όλων των $\big(f(x_n)\big)$ που προέρχονται από ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Δηλαδή, για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) συνεπάγεται

$$f(x_n) \to \eta.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

Περιοριζόμαστε πάλι στην περίπτωση όπου $\eta \in \mathbb{R}$.
Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο αντίστοιχο $x \in A$ για το οποίο ισχύει $0 < |x-\xi| < \delta$ αλλά δεν ισχύει $|f(x)-\eta| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $|f(x)-\eta| \geq \epsilon$. Τώρα, με το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (με $\delta = \frac{1}{n}$) υπάρχει κάποιο αντίστοιχο x_n στο A για το οποίο ισχύει $0 < |x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n)-\eta| \geq \epsilon$.
Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) για την οποία ισχύει

$$|f(x_n)-\eta| \geq \epsilon$$

για κάθε n.
Τώρα, επειδή η (x_n) έχει τις ιδιότητες (i) και (ii), συνεπάγεται ότι πρέπει $f(x_n) \to \eta$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f(x_n)-\eta| \geq \epsilon$, αφού το ϵ είναι ένας θετικός αριθμός ανεξάρτητος του n. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Προσέξτε στην προηγούμενη απόδειξη του [β] την διατύπωση της άρνησης του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Ας το δούμε λίγο πιο αναλυτικά.
Το ότι ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ σημαίνει ότι

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \qquad \big(\, 0 < |x-\xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-\eta| < \epsilon \,\big)$$

Άρα το ότι *δεν* ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$ σημαίνει ότι

$$\exists\epsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in A \qquad \neg\big(\ 0<|x-\xi|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-\eta|<\epsilon\ \big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\exists\epsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in A \qquad \Big(\ 0<|x-\xi|<\delta \quad\wedge\quad \neg(\ |f(x)-\eta|<\epsilon\ )\ \Big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\exists\epsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists x\in A \qquad \big(\ 0<|x-\xi|<\delta \quad\wedge\quad |f(x)-\eta|\geq\epsilon\ \big).$$

Προσέξτε. Το ότι ισχύει μια συνεπαγωγή σημαίνει ότι "*όταν* αληθεύει η υπόθεσή της *τότε* αληθεύει και το συμπέρασμά της". Επομένως, το ότι δεν ισχύει μια συνεπαγωγή σημαίνει ότι "αληθεύει η υπόθεσή της *και* δεν αληθεύει το συμπέρασμά της".

Ερχόμαστε τώρα και στο Θεώρημα 3.2 του βιβλίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και ξ το οποίο είναι από τα αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ, τότε το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ υπάρχει. Το όριο αυτό είναι αριθμός αν η f είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ και είναι $+\infty$ αν η f δεν είναι άνω φραγμένη αριστερά του ξ.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο τιμών της f αριστερά του ξ, δηλαδή το

$$Y=\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}.$$

Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη αριστερά του ξ. Τότε το σύνολο τιμών Y είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, οπότε το

$$\eta=\sup Y=\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}$$

είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta.$$

Έστω $\epsilon>0$. Τότε $\eta-\epsilon<\eta$, οπότε από την δεύτερη ιδιότητα του supremum συνεπάγεται ότι υπάρχει στοιχείο του Y ανάμεσα στα $\eta-\epsilon$ και η. Δηλαδή υπάρχει $x_0\in A$ με $x_0<\xi$ ώστε

$$\eta-\epsilon<f(x_0).$$

Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ αλλά και επειδή το η είναι άνω φράγμα του Y, έχουμε ότι για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$\eta-\epsilon<f(x_0)\leq f(x)\leq\eta<\eta+\epsilon.$$

Δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$\eta-\epsilon<f(x)<\eta+\epsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta$.

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι η f είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη αριστερά του ξ. Τότε το Y είναι μη-κενό αλλά όχι άνω φραγμένο, οπότε

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x<\xi\}=\sup Y=+\infty.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του Y, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ με $x_0 < \xi$ ώστε

$$f(x_0) > M.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα αριστερά του ξ, έχουμε ότι για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > M.$$

Άρα $\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$. □

Το Θεώρημα αυτό περιέχει και άλλες περιπτώσεις: για το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ όταν η f είναι φθίνουσα αριστερά του ξ καθώς και για το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ όταν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα δεξιά του ξ. Γι αυτές τις περιπτώσεις δείτε το Θεώρημα 3.2 στο βιβλίο.