ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 7-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Από τους δείκτες

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

κάνουμε μια *γνησίως αύξουσα* επιλογή *άπειρων* δεικτών (δηλαδή φυσικών)

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots$$

και κατόπιν θεωρούμε τους αντίστοιχους όρους της αρχικής ακολουθίας:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_{n_4}, \ldots .$$

Έτσι δημιουργείται μια καινούργια ακολουθία και, επειδή οι όροι της είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής ακολουθίας, λέμε ότι η καινούργια ακολουθία (x_{n_k}) είναι **υποακολουθία** της αρχικής (x_n).

Προσέξτε ότι ο δείκτης της υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k. Πράγματι, σκεφτείτε το μέτρημα: πρώτος όρος ο x_{n_1}, δεύτερος όρος ο x_{n_2}, τρίτος όρος ο x_{n_3} και, γενικά, k-οστός όρος ο x_{n_k}.

Προσέξτε επίσης ότι οι δείκτες n_k της αρχικής ακολουθίας (x_n) πρέπει να αυξάνονται γνησίως. Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$n_k < n_{k+1}$$

για κάθε k. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος $x_{n_{k+1}}$ "έρχεται μετά" από τον x_{n_k} στην ακολουθία (x_n) (χωρίς να είναι αναγκαστικά διαδοχικοί).

Υπάρχουν άπειρες υποακολουθίες μιας ακολουθίας. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα τα οποία παρουσιάζονται συχνά είναι τα εξής:

Η λεγόμενη **υποακολουθία των περιττών δεικτών**, όπου $n_k = 2k - 1$ για κάθε k, είναι η

$$x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Η λεγόμενη **υποακολουθία των άρτιων δεικτών**, όπου $n_k = 2k$ για κάθε k, είναι η

$$x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Τέλος, επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k, βρίσκουμε την ίδια την αρχική ακολουθία

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Πρέπει, όμως, να καταλάβουμε ότι οι υποακολουθίες μιας ακολουθίας δεν περιορίζονται σ' αυτά τα κάπως "κανονικά" παραδείγματα. Γενικά, δημιουργούμε υποακολουθία παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_1 και τον αντίστοιχο όρο x_{n_1}, κατόπιν παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_2 μετά από τον n_1 (οσοδήποτε μακρυά από τον n_1) και τον αντίστοιχο όρο x_{n_2}, κατόπιν παίρνοντας τυχαία έναν δείκτη n_3 μετά από τον n_2 (οσοδήποτε μακρυά από τον n_2) και τον αντίστοιχο όρο x_{n_3} κλπ.

Τώρα, είναι προφανές ότι ισχύει

$$n_1 \geq 1$$

ακριβώς διότι ο n_1 είναι φυσικός. Κατόπιν, σκεφτόμαστε ότι οι n_1, n_2 είναι φυσικοί, οπότε απέχουν τουλάχιστον μια μονάδα και, επομένως,

$$n_2 \geq n_1 + 1 \geq 1 + 1 = 2.$$

Ομοίως, οι n_2, n_3 είναι φυσικοί, οπότε απέχουν τουλάχιστον μια μονάδα και, επομένως,

$$n_3 \geq n_2 + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

και, επαγωγικά, βλέπουμε ότι ισχύει

$$n_k \geq k$$

για κάθε k. Επομένως,

$$n_k \to +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε

$$x_n \to x.$$

(Το x μπορεί να είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$.)
Θεωρούμε οποιαδήποτε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x_n \to x$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$x_n \in N_x(\epsilon) \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Τώρα, επειδή $n_k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα)

$$n_k \geq n_0.$$

Άρα ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα)

$$x_{n_k} \in N_x(\epsilon).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε ϵ ισχύει τελικά (δηλαδή, από κάποιον k και πέρα) $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως,

$$x_{n_k} \to x.$$

□

Η τελευταία Πρόταση (η Πρόταση 2.14 στο βιβλίο) χρησιμοποιείται πολύ συχνά με "αρνητικό" τρόπο: αν βρούμε δυο υποακολουθίες μιας ακολουθίας οι οποίες έχουν διαφορετικά όρια, τότε συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία δεν έχει όριο. Τυπικό παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots,$$

δηλαδή η $\big((-1)^{n-1}\big)$. Γνωρίζουμε ήδη, μέσω προηγούμενης Πρότασης, ότι η ακολουθία αυτή δεν έχει όριο. Αλλά μπορούμε να το δούμε και μέσω των υποακολουθιών των περιττών και των άρτιων δεικτών. Η πρώτη υποακολουθία είναι η σταθερή ακολουθία

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

και έχει όριο 1 και η δεύτερη είναι η σταθερή ακολουθία

$$-1, -1, -1, -1, \ldots$$

και έχει όριο -1.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν οι υποακολουθίες των περιττών δεικτών και των άρτιων δεικτών μιας ακολουθίας έχουν το ίδιο όριο, τότε και η ακολουθία έχει το ίδιο όριο.*

Δεν θα αποδείξουμε αυτήν την Πρόταση, την Πρόταση 2.15 του βιβλίου. Μπορείτε να διαβάσετε μόνοι σας την απόδειξη. Θα δούμε, όμως, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 - \frac{1}{2}, \\ x_3 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ x_4 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\ x_5 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

και, γενικότερα,

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Αν πάρουμε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, βλέπουμε εύκολα ότι είναι (γνησίως) φθίνουσα:

$$1 > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) > 1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\Big) > \dots$$

διότι κάθε παρένθεση αποτελεί έναν θετικό αριθμό.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η ίδια υποακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον 0, αφού για παράδειγμα

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) + \frac{1}{7} > 0.$$

Κατόπιν, έχουμε ότι η υποακολουθία των άρτιων δεικτών είναι (γνησίως) αύξουσα, αφού

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) < \dots ,$$

και άνω φραγμένη από τον 1, αφού για παράδειγμα

$$1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) - \frac{1}{6} < 1.$$

Άρα και οι δυο υποακολουθίες έχουν όρια αριθμούς: έστω

$$x_{2k-1} \to x' \qquad \text{και} \qquad x_{2k} \to x''.$$

Επειδή

$$x_{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

και
$$x_{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1},$$
έχουμε ότι
$$x_{2k-1} - x_{2k} = \frac{1}{2k} \to 0.$$
Επειδή απο την άλλη μεριά ισχύει $x_{2k-1} - x_{2k} \to x' - x''$, συμπεραίνουμε ότι $x' - x'' = 0$, οπότε
$$x' = x''.$$

Άρα οι δυο υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο, έστω $x = x' = x''$, οπότε και η ακολουθία (x_n) έχει όριο τον αριθμό x.
Αξίζει να παρατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της (x_n) σε σχέση με το όριο x:
$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k} < \ldots < x < \ldots < x_{2k-1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον x και, ομοίως, η (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x.
Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα διαστήματα $[x_2, x_1]$, $[x_4, x_3]$, $[x_6, x_5]$, $\ldots$ είναι εγκιβωτισμένα και ότι το όριο x είναι ο μοναδικός αριθμός που περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα.

Και τώρα πάμε να αποδείξουμε ένα από τα σημαντικότερα Θεωρήματα της Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) η οποία είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει
$$l \leq x_n \leq u$$
για κάθε n. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει.
Θα αρχίσουμε να χωρίζουμε το διάστημα $[l, u]$ σε όλο και μικρότερα διαστήματα με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο που θα περιγράψουμε αμέσως.

Κατ' αρχάς χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$ και $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι

οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). (Αν ένα τσουβάλι περιέχει άπειρα πράγματα και χωρίσουμε το τσουβάλι σε δυο τσουβάλια, τότε ένα τουλάχιστον από τα δυο τσουβάλια θα περιέχει άπειρα από τα ίδια πράγματα.)
Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. (Αν το δεξιό ημιδιάστημα περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και το αριστερό ημιδιάστημα περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ το δεξιό ημιδιάστημα. Αν το δεξιό ημιδιάστημα περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους της (x_n) και το αριστερό ημιδιάστημα περιέχει άπειρους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ το αριστερό ημιδιάστημα. Αν και τα δυο ημιδιαστήματα περιέχουν άπειρους όρους της (x_n), τότε επιλέγουμε ως $[l_1, u_1]$ ένα οποιοδήποτε από τα δυο ημιδιαστήματα.)
Κατόπιν, χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$ και $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ (ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα).
Κατόπιν, χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δυο ημιδιαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$ και $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο ημιδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο ημιδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μια ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων

$$[l_1, u_1], [l_2, u_2], [l_3, u_3], \ldots .$$

Από το Θεώρημα για τα Εγκιβωτισμένα Διαστήματα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα αυτά τα διαστήματα. Μάλιστα μπορούμε να δούμε ότι κάθε φορά τα μήκη των διαστημάτων υποδιπλασιάζονται:

$$u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}, \quad u_2 - l_2 = \frac{u_1 - l_1}{2} = \frac{u-l}{2^2}, \quad u_3 - l_3 = \frac{u_2 - l_2}{2} = \frac{u-l}{2^3}$$

και, επαγωγικά,

$$u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k},$$

οπότε

$$u_k - l_k \to 0.$$

Άρα, πάλι από το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων και τη συζήτηση μετά από αυτό, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[l_k, u_k]$ είναι μοναδικός και είναι το κοινό όριο των ακολουθιών (l_k) και (u_k). Δηλαδή

$$l_k \to x \qquad \text{και} \qquad u_k \to x.$$

Τώρα γυρνάμε πίσω στην αρχική ακολουθία (x_n) και θα δούμε πώς θα επιλέξουμε μια συγκλίνουσα υποακολουθία της.
Επειδή το διάστημα $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω

$$x_{n_1} \in [l_1, u_1].$$

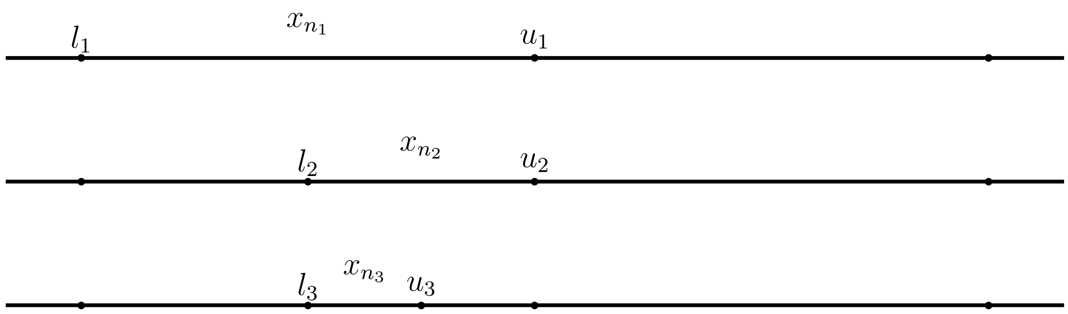
Κατόπιν, επειδή και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω

$$x_{n_2} \in [l_2, u_2].$$

Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.
Κατόπιν, επειδή το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω

$$x_{n_3} \in [l_3, u_3].$$

Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.
Άρα το προηγούμενο σχήμα αναδιαμορφώνεται ως εξής:



Συνεχίζοντας επ' άπειρον, σχηματίζουμε μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Το ότι η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία έχει να κάνει με το ότι προσέξαμε ώστε η επιλογή των δεικτών n_k να είναι *γνησίως αύξουσα.*
Τώρα, αυτή η υποακολουθία έχει την ιδιότητα να ισχύει

$$l_k \le x_{n_k} \le u_k$$

για κάθε k και, επειδή $l_k \to x$ και $u_k \to x$, συνεπάγεται

$$x_{n_k} \to x.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. $\square$

Προσέξτε τον "υπαρξιακό χαρακτήρα" αυτής της απόδειξης. Επειδή η ακολουθία (x_n) δεν είναι συγκεκριμένη, δεν μπορούμε να βρούμε συγκεκριμένη υποακολουθία της η οποία να συγκλίνει. Αν είχαμε, για παράδειγμα, την γνωστή μας ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$, η οποία είναι φραγμένη, τότε θα μπορούσαμε να υποδείξουμε συγκεκριμένη συγκλίνουσα υποακολουθία της: είτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών είτε την υποακολουθία των άρτιων δεικτών.