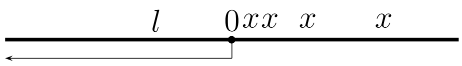
ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 8-10-13

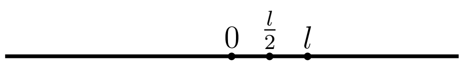
Μ. Παπαδημητράκης.

Κατ' αρχάς θα δούμε μια πολλή απλή πρόταση.



ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ο* l *έχει την εξής ιδιότητα:* $l \leq x$ *για κάθε* $x > 0$*. Τότε* $l \leq 0$*.*

Απόδειξη. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $l > 0$.
Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{l}{2}$, ο οποίος είναι > 0. Τότε, βάσει της υπόθεσης της πρότασης, πρέπει να ισχύει $l \leq \frac{l}{2}$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται $l \leq 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η αρχική υπόθεση της απόδειξης δεν είναι σωστή, οπότε $l \leq 0$.
Μπορούμε να διατυπώσουμε την ίδια απόδειξη με διαφορετικό τρόπο.
Υποθέτουμε πάλι ότι $l > 0$.



Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{l}{2}$ για τον οποίο προφανώς ισχύει $0 < x < l$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με την υπόθεση της πρότασης ότι ισχύει $l \leq x$ για *κάθε* $x > 0$.
Άρα η αρχική υπόθεση της απόδειξης δεν είναι σωστή, οπότε $l \leq 0$. □

Η ιδέα της προηγούμενης απόδειξης είναι ότι όποιον *θετικό* αριθμό l κι αν πάρουμε υπάρχει κάποιος αριθμός x ο οποίος είναι κι αυτός *θετικός* και *μικρότερος από τον αριθμό που πήραμε*, δηλαδή τέτοιος ώστε $0 < x < l$. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τον $x = \frac{l}{2}$, αλλά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον $x = \frac{l}{3}$ ή τον $x = \frac{2l}{3}$ ή και οποιονδήποτε άλλον συγκεκριμένο x με την ιδιότητα $0 < x < l$.

Τί μας λέει η προηγούμενη πρόταση; Η υπόθεση είναι ότι ο αριθμός l βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) κάθε αριθμού δεξιά του 0. Το συμπέρασμα είναι ότι ο l είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του 0. Με πιο γλαφυρή διατύπωση: ο l σπρώχνεται προς τα αριστερά από όλους τους αριθμούς οι οποίοι είναι δεξιά του 0 και αναγκάζεται να είναι αριστερά (με την ευρεία έννοια) του 0. Ας το πούμε διαφορετικά. Αν υπήρχε αριθμός l δεξιά του 0 τέτοιος ώστε όλοι οι αριθμοί που είναι δεξιά του 0 να είναι δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, τότε προφανώς αυτός ο l θα ήταν *ο μικρότερος αριθμός* δεξιά του 0. Με άλλα λόγια θα υπήρχε *ελάχιστος* αριθμός δεξιά του 0. Η πρόταση λέει ότι αυτό δεν είναι σωστό: δεν υπάρχει l ο οποίος είναι ελάχιστος θετικός διότι για παράδειγμα ο $\frac{l}{2}$ είναι ακόμη μικρότερος θετικός. Αυτό το τελευταίο φαίνεται να είναι προφανές, αλλά η εμπειρία μου λέει ότι πάρα πολλοί κάνουν λάθος και έχουν την (ψυχολογική;) τάση να θεωρούν κάπως επιπόλαια ότι υπάρχει κάποιος πολύ-πολύ-πολύ μικρός θετικός αριθμός ο οποίος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός. Γι αυτό τονίζω ότι:

Δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός αριθμός.

Το ότι αναφερόμαστε ειδικά στον αριθμό 0 και στη σχέση ανάμεσα σ' αυτόν και στους άλλους αριθμούς είναι καθαρά θέμα τυχαίας επιλογής. Τον ρόλο του 0 μπορεί να τον παίξει κάθε άλλος αριθμός. Επίσης, το "δεξιά" και το "αριστερά" μπορούν να αλλάξουν ρόλους. Έτσι έχουμε τις διατυπώσεις:

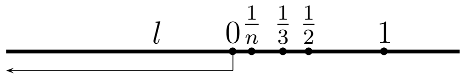
Δεν υπάρχει ελάχιστος αριθμός μεγαλύτερος του (οποιουδήποτε) a*. Δεν υπάρχει μέγιστος αριθμός μικρότερος του (οποιουδήποτε)* b*.*

Επίσης:

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Έστω ότι ο l έχει την εξής ιδιότητα: $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τότε $l \leq a$.* [β] *Έστω ότι ο u έχει την εξής ιδιότητα: $u \geq x$ για κάθε $x < b$. Τότε $u \geq b$.*

Αυτή είναι η Πρόταση 1.3 στο βιβλίο και μπορείτε να διαβάσετε εκεί την απόδειξη: είναι ίδια με την απόδειξη της πρώτης πρότασης παραπάνω. Για παράδειγμα, στο [α] αντί του $\frac{l}{2}$, δηλαδή του $\frac{0+l}{2}$, χρησιμοποιούμε τον $\frac{a+l}{2}$. Αν $a < l$, τότε $a < \frac{a+l}{2} < l$.

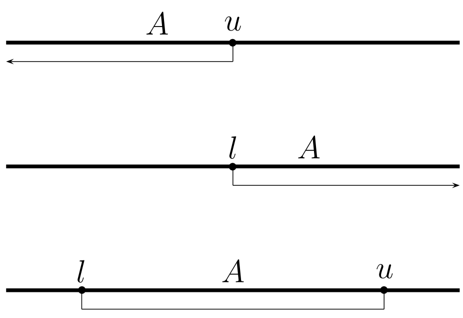
Τώρα θα κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση σαν προοίμιο κάποιας σημαντικής ιδιότητας των αριθμών που θα μελετήσουμε σε λίγο.



Ας υποθέσουμε ότι ένας αριθμός l έχει την ιδιότητα Α: $l \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι αριθμοί $\frac{1}{n}$, όταν ο n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς, είναι θετικοί αριθμοί αλλά *δεν* είναι *όλοι* οι θετικοί αριθμοί. Άρα η ιδιότητα Α είναι ασθενέστερη από την ιδιότητα της πρότασης: $l \leq x$ για κάθε $x > 0$. Αυτό σημαίνει ότι, ενώ ένας l που έχει την ιδιότητα της πρότασης υποχρεώνεται να είναι ≤ 0, ένας l που έχει την ιδιότητα Α μπορεί να μην υποχρεώνεται να είναι ≤ 0 και ότι θα μπορούσε να υπάρχει κάποιος $l > 0$ που να έχει την ιδιότητα Α. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να υπάρχει κάποιος $l > 0$ τέτοιος ώστε στο διάστημα $(0, l)$ να μην υπάρχει κανένας αριθμός $\frac{1}{n}$ όταν ο n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς. Θα δούμε σε λίγο ότι αυτό δεν είναι σωστό. Αυτή είναι η Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, αλλά την απόδειξη δεν μπορούμε να την κάνουμε αυτή τη στιγμή με τα μέσα που διαθέτουμε. Θα χρειαστούμε μια άλλη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Supremum.

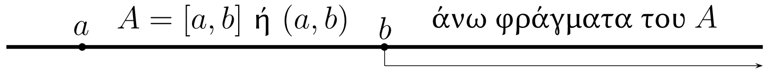
Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός u τέτοιος ώστε να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A. Αν το σύνολο A είναι άνω φραγμένο και ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε αριθμός $> u$ είναι επίσης άνω φράγμα του A. Ομοίως, ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός l τέτοιος ώστε να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Ένας τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A. Αν το σύνολο A είναι κάτω φραγμένο και ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε αριθμός $< l$ είναι επίσης κάτω φράγμα του A. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν περιέχεται σε κάποιο διάστημα $[l, u]$.

Αν ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου A, τότε το σύνολο A βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u και, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε το A βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l.



Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Έστω $A = [a, b]$.
Είναι προφανές ότι κάθε αριθμός $u \geq b$ είναι άνω φράγμα του $[a, b]$ αλλά και ότι κάθε άνω φράγμα u του $[a, b]$ είναι αναγκαστικά $\geq b$. Αυτό το τελευταίο ισχύει διότι, αν ο u είναι άνω φράγμα του $[a, b]$, πρέπει να είναι $\geq$ κάθε στοιχείου του $[a, b]$ και, επομένως, και του b ο οποίος είναι στοιχείο του $[a, b]$.
Άρα τα άνω φράγματα του $[a, b]$ είναι όλοι οι αριθμοί $\geq b$ και κανένας άλλος.
Παρατηρούμε ότι το $[a, b]$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, τον b.



Παράδειγμα. Έστω $A = (a, b)$.
Είναι πάλι προφανές ότι κάθε αριθμός $u \geq b$ είναι άνω φράγμα του (a, b). Όταν, όμως, θέλουμε να δούμε αν ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε άνω φράγμα u του (a, b) είναι αναγκαστικά $\geq b$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα στο προηγούμενο παράδειγμα, διότι τώρα ο b δεν είναι στοιχείο του (a, b).
Σκεφτόμαστε, όμως, ότι αν ο u είναι άνω φράγμα του (a, b), τότε είναι $\geq$ κάθε στοιχείου του (a, b) και, επομένως, κάθε αριθμού $< b$, οπότε, σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση, ο u πρέπει να είναι $\geq b$.
Άρα τα άνω φράγματα του (a, b) είναι όλοι οι αριθμοί $\geq b$ και κανένας άλλος.
Βλέπουμε πάλι ότι το (a, b), όπως και το $[a, b]$, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, τον b.

Παράδειγμα. Με όμοιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι τα κάτω φράγματα των συνόλων $A = [a, b]$ και $A = (a, b)$ είναι όλοι οι αριθμοί $\leq a$ και κανένας άλλος και, επομένως, και τα δυο σύνολα έχουν ως μέγιστο κάτω φράγμα τον a.

Ας θυμηθούμε μερικούς γνωστούς όρους. Αν το σύνολο A έχει **μέγιστο στοιχείο**, δηλαδή στοιχείο του A που είναι $>$ από κάθε άλλο στοιχείο του A, τότε αυτό ονομάζεται **maximum** του A και συμβολίζεται $\max A$. Ομοίως, αν το A έχει **ελάχιστο στοιχείο**, δηλαδή στοιχείο του A που είναι $<$ από κάθε άλλο στοιχείο του A, τότε αυτό ονομάζεται **minimum** του A και συμβολίζεται $\min A$.

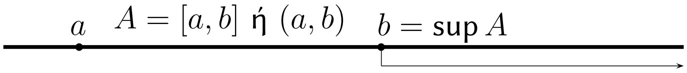
Παραδείγματα. Για το $[a, b]$ έχουμε $\max[a, b] = b$ και $\min[a, b] = a$.
Όμως, το (a, b) δεν έχει μέγιστο στοιχείο ακριβώς επειδή δεν υπάρχει μέγιστος αριθμός $< b$. Ομοίως, το (a, b) δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Και τώρα ας δούμε την σημαντικότερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ SUPREMUM. *Κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Με άλλη διατύπωση: αν ένα μη-κενό σύνολο είναι άνω φραγμένο (οπότε έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα), τότε από τα άνω φράγματά του υπάρχει ένα το οποίο είναι το ελάχιστο δυνατό.*

Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός μη-κενού, άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται **supremum** του A και συμβολίζεται $\sup A$.

Παραδείγματα. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $\sup[a, b] = b$ και $\sup(a, b) = b$.
Θυμηθείτε ότι το $[a, b]$ έχει μέγιστο στοιχείο ενώ το (a, b) δεν έχει μέγιστο στοιχείο.



Κάποιες φορές έχουμε ένα συγκεκριμένο σύνολο A το οποίο είναι μη-κενό και άνω φραγμένο και πρέπει να βρούμε το $\sup A$. Υπάρχει μια ειδική περίπτωση που το $\sup A$ είναι άμεσα αναγνωρίσιμο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν το σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο,* $\max A$*, τότε αυτό είναι το* $\sup A$*.*

Απόδειξη. Προφανώς το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A (διότι δεν υπάρχει στοιχείο του A που να είναι $> \max A$) και φυσικά κάθε αριθμός $\geq \max A$ είναι επίσης άνω φράγμα του A. Από την άλλη μεριά κάθε άνω φράγμα του A είναι $\geq \max A$ διότι το $\max A$ είναι στοιχείο του A. Άρα τα άνω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\geq \max A$ και μόνο αυτοί. Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. $\square$