ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 8-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Το Θεώρημα των Bolzano και Weierstrass συμπληρώνεται με την εξής Πρόταση (2.16 του βιβλίου).

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Κάθε όχι άνω φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία με όριο $+\infty$.*

[β] *Κάθε όχι κάτω φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία με όριο $-\infty$.*

Μπορείτε να διαβάσετε μόνοι σας την απόδειξη. Ας δούμε, καλύτερα, μερικά σχετικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Μια ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη, είναι κάτω φραγμένη και δεν έχει όριο.
Για να βρούμε μια τέτοια ακολουθία σκεφτόμαστε ότι, βάσει της τελευταίας Πρότασης, πρέπει να έχει μια υποακολουθία με όριο $+\infty$ και, επειδή δεν πρέπει να έχει όριο, καλό θα ήταν να έχει και μια δεύτερη υποακολουθία με όριο $\neq +\infty$. Τέλος, επειδή η ακολουθία πρέπει να είναι κάτω φραγμένη, δεν πρέπει να έχει υποακολουθία με όριο $-\infty$. Άρα θα βρούμε μια ακολουθία η οποία να σχηματίζεται από δυο υποακολουθίες, η μία με όριο $+\infty$ και η άλλη με όριο έναν αριθμό.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Τώρα είναι προφανές πώς θα βρούμε ακολουθία η οποία δεν είναι κάτω φραγμένη, είναι άνω φραγμένη και δεν έχει όριο.

(2) Μια ακολουθία όχι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.
Τώρα σκεφτόμαστε ότι μια τέτοια ακολουθία, βάσει της τελευταίας Πρότασης, πρέπει να έχει μια υποακολουθία με όριο $+\infty$ και μια υποακολουθία με όριο $-\infty$. Άρα θα βρούμε μια ακολουθία η οποία να σχηματίζεται από δυο υποακολουθίες, η μία με όριο $+\infty$ και η άλλη με όριο $-\infty$.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Άσκηση 2.5.1. *Βρείτε πολύ απλή ακολουθία με τρεις υποακολουθίες, οι οποίες να έχουν όρια a, b, c, αντιστοίχως, όπου a, b, c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί.*

Λύση: Η ακολουθία

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Ερώτηση: Τί θα κάνετε αν τα a, b, c είναι στοιχεία του $\overline{\mathbb{R}}$ και όχι αναγκαστικά και τα τρία αριθμοί;

Άσκηση 2.4.8[β]. *Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει*

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \qquad \textit{(αναδρομικός τύπος)}$$

για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

Λύση: Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι:

$$x_1,\ x_2 = \sqrt{2x_1},\ x_3 = \sqrt{2x_2} = \sqrt{2\sqrt{2x_1}},\ x_4 = \sqrt{2x_3} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x_1}}},\ \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Έτσι, είναι σαφής ο μηχανισμός σχηματισμού των όρων της ακολουθίας, αλλά δεν είναι εύκολο να γράψουμε απλό τύπο για τον n-οστό όρο της και δεν θα μας βοηθήσει κάτι τέτοιο στον χειρισμό της ακολουθίας.
Επειδή πρέπει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη, αρχίζουμε μελετώντας την ανισότητα

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ή την ισοδύναμη

$$x_n \leq \sqrt{2x_n}.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της (x_n) είναι > 0, οπότε θα μπορούμε να χειριζόμαστε κάπως ελεύθερα διάφορες ανισότητες που θα παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της λύσης.
Άρα η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την

$${x_n}^2 \leq 2x_n$$

κι αυτή με την

$$x_n \leq 2.$$

Έχουμε, δηλαδή, τις ισοδυναμίες

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \leq 2$$

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq x_n.$$

Βλέπουμε ότι η σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον επόμενό του εξαρτάται άμεσα από τη σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον αριθμό 2. Και είναι απολύτως σαφές ότι, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία αύξουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≤ 2 ενώ, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία φθίνουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≥ 2.
Θα διακρίνουμε, επομένως, δυο περιπτώσεις: να είναι $x_1 \leq 2$ ή να είναι $x_1 \geq 2$. Στην πρώτη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≤ 2, οπότε η (x_n) θα είναι αύξουσα, και στη δεύτερη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≥ 2, οπότε η (x_n) θα είναι φθίνουσα.
Έστω, λοιπόν,

$$0 < x_1 \leq 2.$$

Πάμε με επαγωγή. Αν υποθέσουμε

$$x_n \leq 2 \qquad \text{για κάποιον } n,$$

τότε

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Άρα ισχύει

$$x_n \leq 2 \qquad \text{για κάθε } n$$

και η (x_n) είναι αύξουσα.
Όμως, είμαστε ευτυχείς διότι έχουμε ταυτόχρονα αποδείξει ότι η (x_n) είναι *και άνω*

φραγμένη από τον 2. Άρα η (x_n) συγκλίνει και μένει να βρούμε το όριό της. Αν

$$x_n \to x,$$

τότε ο αναδρομικός τύπος

$$x_{n+1}^2 = 2x_n$$

συνεπάγεται

$$x^2 = 2x,$$

οπότε

$$x = 0 \qquad \text{ή} \qquad x = 2.$$

Η περίπτωση $x = 0$ απορρίπτεται, διότι η (x_n) είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι $x_1 > 0$. Άρα $x = 2$, οπότε

$$x_n \to 2.$$

Αν υποθέσουμε

$$x_1 \geq 2,$$

τότε πάλι με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι ισχύει

$$x_n \geq 2 \qquad \text{για κάθε } n$$

και η (x_n) είναι φθίνουσα (και κάτω φραγμένη από τον 2). Και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι πάλι

$$x_n \to 2.$$

Σχόλιο: Η άσκηση ζητά να αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία είναι μονότονη και κατόπιν να βρούμε το όριό της. Όμως, η άσκηση θα μπορούσε να είναι διατυπωμένη ως εξής.

Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία έχει όριο και βρείτε το.

Τότε θα πρέπει να *υποψιαστούμε* ότι η (x_n) μπορεί να είναι μονότονη και να ακολουθήσουμε με δική μας πρωτοβουλία την παραπάνω λύση.

Άσκηση 2.4.15. *Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο*

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αυτές οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Τί συμπεραίνετε για την αρχική ακολουθία (x_n);

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα γράφουμε διαδοχικά τις ισοδύναμες ανισότητες

$$n{x_n}^2 \leq (n+1){x_{n+1}}^2$$

$$n\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} \leq (n+1)\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2(2n+1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2(2n+2)^2}$$

$$n \leq (n+1)\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}$$

$$4n(n+1)^2 \leq (n+1)(2n+1)^2$$
$$4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$
$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1,$$

η οποία είναι προφανώς σωστή. Άρα η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Κάντε το εσείς.
Για να αποδείξουμε ότι οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρώτη είναι και άνω φραγμένη και ότι η δεύτερη είναι και κάτω φραγμένη. Σ' αυτό μας βοηθά η απλή παρατήρηση ότι ισχύει

$$n{x_n}^2 \leq \Big(n+\frac{1}{2}\Big){x_n}^2$$

για κάθε n. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η διάταξη των όρων των δυο ακολουθιών είναι κάπως έτσι:

Παρατηρούμε ότι υπάρχει άμεση σχέση με το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων. Αμέσως φαίνεται ότι η πρώτη ακολουθία είναι άνω φραγμένη από τον $(1+\frac{1}{2}){x_1}^2$ και ότι η δεύτερη ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον $1{x_1}^2$. Άρα και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν και απομένει να αποδείξουμε ότι έχουν το ίδιο όριο.

Σκέψεις:
Αν ακολουθήσουμε το πλαίσιο του Θεωρήματος των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων, στοχεύουμε στο να αποδείξουμε ότι τα μήκη των συγκεκριμένων εγκιβωτισμένων διαστημάτων τείνουν στον 0, δηλαδή ότι

$$\Big(n+\frac{1}{2}\Big){x_n}^2 - n{x_n}^2 \to 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}\,{x_n}^2 \to 0.$$

Αυτό, όμως, φαίνεται να ζορίζει λιγάκι, οπότε κοιτάμε μπας και σκεφτούμε κάτι πιο δημιουργικό.
Γενικά, αν έχουμε δυο συγκλίνουσες ακολουθίες (y_n) και (z_n) με αντίστοιχα όρια y και z (αριθμούς) και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $y = z$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $y_n - z_n \to 0$, διότι τότε θα συμπεράνουμε (από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $y - z = 0$ και, επομένως, $y = z$. Αυτήν ακριβώς την ιδέα χρησιμοποιεί το Θεώρημα των Εγκιβωτισμένων Διαστημάτων. Όμως, υπάρχει και μια δεύτερη ιδέα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\frac{y_n}{z_n} \to 1$. Τότε θα συμπεράνουμε (πάλι από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $\frac{y}{z} = 1$ και, επομένως, $y = z$. (Φυσικά θα πρέπει να ισχύει $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.)
Τέλος σκέψεων.

Συνεχίζουμε με τη λύση.
Έστω
$$n{x_n}^2 \to x' \qquad \text{και} \qquad \Big(n+\frac{1}{2}\Big){x_n}^2 \to x''.$$

Τότε, επειδή $x' \neq 0$ (διότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι > 0), έχουμε

$$\frac{(n+\frac{1}{2}){x_n}^2}{n{x_n}^2} \to \frac{x''}{x'}.$$

Αλλά

$$\frac{(n+\frac{1}{2}){x_n}^2}{n{x_n}^2} = \frac{n+\frac{1}{2}}{n} \to 1,$$

οπότε $\frac{x''}{x'} = 1$ και άρα

$$x' = x''.$$

Άρα οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο $x = x' = x''$.
Τέλος, από την

$$n{x_n}^2 \to x$$

συνεπάγεται

$${x_n}^2 = \frac{1}{n} \cdot n{x_n}^2 \to 0 \cdot x = 0$$

και, επομένως,

$$x_n \to 0.$$

Σχόλιο: Αν θέλουμε να αποδείξουμε *κατ' ευθείαν* ότι η αρχική ακολουθία (x_n) έχει όριο (και μάλιστα τον 0) θα δυσκολευτούμε αρκετά. Ο τύπος του x_n αποτελεί απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ούτε απλοποιείται εύκολα. Μπορούμε να δοκιμάσουμε, όπως σε ανάλογα παραδείγματα και ασκήσεις, το κριτήριο λόγου. Κάνοντας απλοποιήσεις βρίσκουμε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1.$$

Όμως, το κριτήριο λόγου δεν έχει κανένα συμπέρασμα για την περίπτωση $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$. Έχει γενικό συμπέρασμα μόνο στις περιπτώσεις που το όριο a του λόγου $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq a < 1$ ή την $a > 1$.

Άσκηση 2.5.7. *Έστω $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$, όπου τα $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι διαφορετικά (και άρα η (x_n) δεν έχει όριο). Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) έτσι ώστε $x_{n_k} \to x$. Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.*

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}). Τότε αυτοί οι κοινοί όροι των δυο ακολουθιών αποτελούν υποακολουθία της (x_{n_k}) αλλά και της (x_{2k}). Αυτή η συγκεκριμένη κοινή υποακολουθία έχει, επομένως, όριο x (ως υποακολουθία της πρώτης) και όριο a (ως υποακολουθία της δεύτερης). Λόγω μοναδικότητας του ορίου, συνεπάγεται $x = a$.
Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k-1}), τότε $x = b$.
Αλλά δεν μπορεί να ισχύει $x = a$ *και* $x = b$, διότι $a \neq b$.
Άρα δεν είναι δυνατό η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}). Από την άλλη μεριά, η (x_{n_k}) *πρέπει* να έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Αυτό είναι προφανές, αφού οι (x_{2k}) και (x_{2k-1}) σχηματίζουν ολόκληρη την ακολουθία (x_n). Άρα, σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή, πρέπει να ισχύει $x = a$ ή $x = b$.