ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 9-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 4.1.15. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη στο I.*
[α] *Αν το σύνολο τιμών $J = f(I)$ της f είναι διάστημα, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.*
[β] *Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι η $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής στο J.*

Λύση: [α] Επειδή η f είναι μονότονη σε διάστημα, γνωρίζουμε ότι, αν η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $\xi \in I$, τότε υπάρχει κάποιο διάστημα K (θετικού μήκους) το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f. Δηλαδή, υπάρχουν τιμές της f και στις δυο μεριές του K και καμιά τιμή της f στο K. Τότε, όμως, το σύνολο τιμών της f δεν μπορεί να είναι διάστημα.
Άρα, αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$.
[β] Η f είναι γνησίως μονότονη στο I, οπότε ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών J της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού I της f. Δηλαδή $f^{-1} : J \to I$.
Η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα J (διότι η f είναι γνησίως μονότονη) και το σύνολο τιμών της είναι διάστημα (το I). Άρα, εφαρμόζοντας το [α] στην f^{-1}, βλέπουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο J.

Είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I, τότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών $f(I)$ είναι κι αυτό διάστημα. Θα μελετήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση που η f είναι, εκτός από συνεχής, και γνησίως μονότονη στο I. Θα διακρίνουμε διάφορες υποπεριπτώσεις, ανάλογα με το είδος του διαστήματος I.

Πρώτη περίπτωση: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$.
Τότε η ελάχιστη τιμή της f είναι η $f(a)$ και η μέγιστη τιμή της είναι η $f(b)$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), f(b)]$.
Είναι προφανές ότι, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[a, b]$, τότε το σύνολο τιμών είναι το $[f(b), f(a)]$.

Δεύτερη περίπτωση: Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b). Τώρα το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$ και το b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$.
Επειδή η f είναι αύξουσα, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα πλευρικά όρια και, μάλιστα, έχουμε και τύπους για αυτά:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, a < x < b\} = \inf f\big((a, b)\big),$$

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, a < x < b\} = \sup f\big((a, b)\big).$$

Όμως, γνωρίζουμε επίσης ότι γενικά το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα είναι το διάστημα με άκρα το infimum και το supremum του συνόλου τιμών. Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύνολο τιμών $f\big((a, b)\big)$ της f είναι το διάστημα με άκρα $A = \lim_{x \to a+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to b-} f(x)$. Επειδή η f είναι *γνησίως* αύξουσα στο (a, b), δεν μπορεί να έχει ελάχιστη ούτε μέγιστη τιμή. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το ανοικτό διάστημα (A, B).
Αναλόγως, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (a, b), τότε το σύνολο τιμών της είναι το (B, A), όπου A, B είναι τα ίδια με πριν.

Τρίτη περίπτωση: Έστω $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τώρα το a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$.
Ακριβώς όπως πριν, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(A, f(b)]$,

όπου $A = \lim_{x\to a+} f(x)$.
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(a, b]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[f(b), A)$.

Τέταρτη περίπτωση: Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$. Τώρα το b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$.
Και πάλι, όπως πριν, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), B)$, όπου $B = \lim_{x\to b-} f(x)$.
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[a, b)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $(B, f(a)]$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η κατάσταση είναι η εξής:

$$f : I \to J,$$

όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα I και το σύνολο τιμών της f είναι το J, το οποίο είναι διάστημα ίδιου τύπου με το I. Αν ένα άκρο του I ανήκει στο I, τότε το αντίστοιχο άκρο του J ανήκει στο J και είναι η τιμή της f στο άκρο του I. Αν ένα άκρο του I δεν ανήκει στο I, τότε το αντίστοιχο άκρο του J δεν ανήκει στο J και είναι το (πλευρικό) όριο της f στο άκρο του I. Αυτομάτως, η αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} : J \to I$$

είναι γνησίως αύξουσα στο J, έχει σύνολο τιμών το I, και το σημαντικό είναι ότι είναι κι αυτή *συνεχής* στο J. Πράγματι, το συμπέρασμα της άσκησης 4.1.15 που λύσαμε πριν λίγο είναι ότι "συνάρτηση μονότονη σε διάστημα με σύνολο τιμών διάστημα είναι συνεχής".

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2e^x + x + 1 \qquad \text{για } x \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, έχουμε

$$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq {x_1}^2 < {x_2}^2,\ 0 < e^{x_1} < e^{x_2},\ x_1 < x_2.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δυο πρώτες ανισότητες και προσθέτοντας στην ανισότητα που θα προκύψει την τρίτη ανισότητα, βρίσκουμε

$${x_1}^2e^{x_1} + x_1 + 1 < {x_2}^2e^{x_2} + x_2 + 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\big[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\big) = [1, +\infty).$$

Τώρα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής*. Η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει, όπως έχουμε πει, από το ότι είναι μονότονη και από το ότι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της είναι διαστήματα. Θα μπορούσαμε να δούμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής με πιο στοιχειώδη τρόπο αν μπορούσαμε να βρούμε τον τύπο της. Για να γίνει αυτό πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y = x^2e^x + x + 1$ ως προς x

αλλά αυτό είναι αδύνατο!

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Την συνάρτηση αυτή συμβολίζουμε, ως γνωστόν, με το σύμβολο

$$\arcsin : [-1, 1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Παράδειγμα: Η $f(x) = \tan x$ περιορισμένη στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\big(\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x), \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)\big) = (-\infty, +\infty)$.
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Την συνάρτηση αυτή συμβολίζουμε με το σύμβολο

$$\arctan : (-\infty, +\infty) \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Άσκηση 4.5.3. *Βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση*

$$\frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2} = c.$$

Ο αριθμός των λύσεων πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού την ένωση $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.
Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα τέσσερα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της. (Όμως η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα συνολικά στο πεδίο ορισμού της.)
Άρα, υπολογίζοντας όρια, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(-\infty, -1)$ είναι το $(0, -\infty)$, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(-1, 1)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(1, 2)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και, τέλος, το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $(2, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$.
Τώρα, αν $c > 0$, ο c ανήκει στα σύνολα τιμών της f που αντιστοιχούν στα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ αλλά όχι στο σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ και καμία λύση στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Επιπλέον, σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η αντίστοιχη λύση της $f(x) = c$ είναι μοναδική. Το συμπέρασμα είναι ότι, αν $c > 0$, τότε η $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν $c < 0$, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, 2)$.
Τέλος, αν $c = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 1)$ και $(1, 2)$. Η τιμή $c = 0$ δεν περιέχεται στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα δυο άλλα διαστήματα.