ΑΣΚΗΣΕΙΣ: SUPREMUM

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι $\inf(a,b) = a$.

Άσκηση 2. Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο $\min A$, αποδείξτε ότι αυτό το στοιχείο είναι το $\inf A$.

Άσκηση 3. Αποδείξτε τις εξής δυο ιδιότητες του infimum ενός μη-κενού συνόλου A.
(i) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$.
(ii) Για κάθε $\gamma > \inf A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\inf A \leq x < \gamma$.

Άσκηση 4. Υπάρχει μέγιστο κλειστό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a,b);

Άσκηση 5. Έστω μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A και $l = \inf A$.
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap [l, l+\epsilon) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (l, l+\epsilon) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Ποιά είναι η απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $l \notin A$;

Άσκηση 6. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός l.
Αποδείξτε ότι $l \leq \inf A$ αν και μόνο αν ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$.
Αποδείξτε ότι $\inf A \leq l$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma > l$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < \gamma$.

Άσκηση 7. [α] Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε να ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει των $\sup A$, $\inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
[β] Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε να ισχύει $0 < x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $\frac{y}{x} \leq 1 + \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

Άσκηση 8. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A$.

Άσκηση 9. Βρείτε το infimum και το supremum του συνόλου

$$(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \,|\, a < x < b, x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Άσκηση 10. Έστω μη-κενά σύνολα A, B.
Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$;

Άσκηση 11. Αν ισχύει $r \leq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < b$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \cap \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq a\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq b\} = \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.

Άσκηση 12. Έστω $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

Άσκηση 13. Βρείτε τα infimum και supremum των συνόλων

$$\mathbb{N} \cup \{\tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(-1)^n + \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}, \quad \textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [2n-1, 2n], \quad \textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}].$$