ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε βάσει του ορισμού ότι

$$\tfrac{n^4-n^2+1}{n^2+3} \to +\infty, \qquad \tfrac{2^n+1}{2^n-1} \to 1.$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) = \{x\}$.

Άσκηση 3. Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

Άσκηση 4. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n-οστούς όρους:

$$\tfrac{n+2}{3n^2-n+1}\left[\tfrac{3n^2-n+1}{n+2}\right], \qquad \tfrac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \tfrac{4^n n!}{n^n}.$$

Άσκηση 5. Βρείτε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ που δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.

Άσκηση 6. Αν η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και μια από τις $(x_n), (y_n)$ έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

Άσκηση 7. Βρείτε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Άσκηση 8. Βρείτε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.

Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.

Άσκηση 10. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\inf A$ και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μικρότερο του $\inf A$.

Για καθένα από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, βρείτε δυο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες στο σύνολο, μια με όριο το supremum και μια με όριο το infimum του συνόλου.

Άσκηση 11. Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u.

Άσκηση 12. Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Άσκηση 13. Αν $x_n \to x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$.

Άσκηση 14. Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

Άσκηση 15. Αν έχουμε μια ακολουθία εγκιβωτισμένων ανοικτών διαστημάτων, υπάρχει πάντοτε κάποιος αριθμός κοινός σε όλα τα διαστήματα;

Άσκηση 16. Θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με τύπους

$$a_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \log(n+1), \qquad b_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \log n.$$

Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Θεωρήστε δεδομένο ότι ισχύει $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ για κάθε n.

Άσκηση 17. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε μια *πολύ απλή* ακολουθία που να έχει τέσσερις (εκτός των άλλων) υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d. Κατ' αρχάς περιγράψτε τον τρόπο επιλογής των διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μετά γράψτε τον τύπο της.

Άσκηση 18. Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Αν η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Θεωρήστε την ακολουθία με n-οστό όρο

$$x_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε k και, βάσει των προηγουμένων, συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 19. Έστω $a, b, c, x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Έστω ότι $x_{3k} \to a$ και $x_{3k-1} \to b$ και $x_{3k-2} \to c$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$ ή $x = c$.
Έστω $a < b < c$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots \qquad \text{κλπ.}$$

Άσκηση 20. Θεωρήστε την ακολουθία με n-οστό όρο

$$x_n = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει

$$|x_n - x_m| = \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{m-n-1}}{m} \leq \tfrac{1}{n+1}$$

για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

Άσκηση 21. Βρείτε τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των ακολουθιών με n-οστούς όρους

$$\tfrac{n^3+1}{2n^3-n+1}, \quad \tfrac{n^2+n+1}{n+3}, \quad (-2)^n, \quad 2^{(-1)^{n-1}n}, \quad 2^{n-3[n/3]}.$$

Άσκηση 22. Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.
Ποιά είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\underline{\lim}\, x_n$;