ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΕΙΡΕΣ

Άσκηση 1. Βρείτε τα μερικά αθροίσματα τών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-\tfrac{1}{2}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}-\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n$$

και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

Άσκηση 2. Εξετάστε με το απλούστερο δυνατό κριτήριο ως προς τη σύγκλιση τις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{n}{n+1})^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}n\sin\tfrac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}n\log(1+\tfrac{1}{n}).$$

Άσκηση 3. Για ποιές τιμές του x συγκλίνουν οι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}};$$

Άσκηση 4. Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$$

και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι η σειρά έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty}b_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_n.$$

Βρείτε τα αθροίσματα τών

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\tfrac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Άσκηση 5. Βρείτε, αν υπάρχει, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$, όπου $x_{2k-1}=\frac{1}{k}$ και $x_{2k}=-\frac{1}{k}$ για κάθε k.

Άσκηση 6. Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}n(1-\cos\tfrac{1}{n}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\log(1+\tfrac{1}{n^2}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-n\log\tfrac{2n+1}{2n-1}\right).$$

Άσκηση 7. Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες συγκλίνει η

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}).$$

Βρείτε τις τιμές των $a,b,c>0$ για τις οποίες συγκλίνει η

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{a^n}{b^n+c^n}.$$

Άσκηση 8. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(n+1)(n^2+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n}.$$

Για όποιες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όποιες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^p}$$

συγκλίνουν, αν $p > 1$, και αποκλίνουν στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

Άσκηση 10. Έστω $x > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα τί απαντάμε αν κάποιος ισχυριστεί ότι γενικά ισχύει η εναλλαγή

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

των συμβόλων του ορίου και της σειράς;

Άσκηση 11. Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.
[α] Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} < +\infty.$$

[β] Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}} < +\infty.$$

Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.

Άσκηση 12. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $a \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^a < +\infty \text{ και } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^a}{1+{x_n}^a} < +\infty.$$

Άσκηση 13. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου όπου είναι δυνατό:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n n!(3n)!}{(4n)!}.$$

Άσκηση 14. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας όπου είναι δυνατό:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \quad , \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Άσκηση 15. Εξετάστε τη σύγκλιση τής

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

Άσκηση 16. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\tfrac{1}{n}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\log(1+\tfrac{1}{n}),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n(1-\cos\tfrac{1}{n}).$$

Άσκηση 17. Αποδείξτε ότι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $|x|>1$.

Άσκηση 18. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως και η ακολουθία (b_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 19. [α] Αν ισχύει $x_n\geq 0$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}^2$ συγκλίνει.
[β] Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}^2$ να αποκλίνει.

Άσκηση 20. [α] Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{2x}\,dx=\log\sqrt{n+1}$$

για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$$

συγκλίνει.
[β] Αποδείξτε ότι

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\leq 1+\int_1^{n}\frac{1}{2x-1}\,dx=1+\log\sqrt{2n-1}$$

για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\geq\frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$$

για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η ίδια σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$$

δεν συγκλίνει απολύτως.
[γ] Τί έχετε να πείτε για τις

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\Big)^2,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\Big)^3$$

ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση;