ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όρια συναρτήσεων.

Άσκηση 1. Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες:

$$\tfrac{1}{x^2} > 100, \quad \tfrac{x+2}{|x-1|} > 1000, \quad -\tfrac{1}{100} < \tfrac{1}{x+3} < \tfrac{1}{100}\,;$$

Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στον 1 και η τρίτη κοντά στα $\pm\infty$.

Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες:

$$(-1)^{[1/x]} < 0, \quad x - [x] > \tfrac{1}{2}, \quad \sin\tfrac{1}{x} > \tfrac{1}{2}\,;$$

Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0, η δεύτερη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και η τρίτη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αποδείξτε ότι είναι λάθος ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στο $+\infty$, η τρίτη κοντά στον 0.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n.

Άσκηση 3. Έστω ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

Άσκηση 4. Έχουν νόημα τα

$$\lim_{x\to 0-} \tfrac{1}{x+|x|}, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{\sqrt{3x^2+2x-6}}, \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{-x^2}, \quad \lim_{x\to 3+} \sqrt{18-2x^2},$$

$$\lim_{x\to 1-} \log(x^2-1), \quad \lim_{x\to -\infty} (x+2)^{6/4}\,;$$

Προσέξτε: η ερώτηση είναι αν *έχουν νόημα* τα όρια και όχι αν υπάρχουν ή ποιά είναι η τιμή τους.

Αποδείξτε ότι τα

$$\lim_{x\to +\infty} \tfrac{1}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{\sin(1/x)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \log\sin x, \quad \lim_{x\to 0} \log\sin\tfrac{1}{x}$$

έχουν νόημα.

Άσκηση 5. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι

$$\lim_{x\to 2} 3x = 6, \quad \lim_{x\to 1} (\tfrac{1}{x}+1) = 2, \quad \lim_{x\to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{3x}{(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+} \tfrac{x}{2-x} = -\infty, \quad \lim_{x\to \pm\infty} \tfrac{x-3}{2x+1} = \tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to \pm\infty} (3x^2+x) = +\infty.$$

Άσκηση 6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau>0$, δηλαδή έστω

$$f(x+\tau)=f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση 7. [α] Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ αύξουσα στο $[1,+\infty)$ ώστε να ισχύει

$$f(n)\geq\sqrt{n} \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.
[β] Έστω $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ φθίνουσα στο $(0,2)$ ώστε να ισχύει

$$f(\tfrac{1}{n})=1-\tfrac{1}{n} \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.
[γ] Τί αλλάζει ως προς τα προηγούμενα συμπεράσματα αν δεν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f είναι μονότονες;

Άσκηση 8. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ αύξουσα στο A και $\xi\in\mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα όρια $\eta=\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\zeta=\lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta\leq\zeta$.

Συνέχεια συναρτήσεων.

Άσκηση 1. Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\tfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}\ ;$$

Σχεδιάστε το γράφημά της.

Άσκηση 2. Έστω $f:(\xi-\delta,\xi+\delta)\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε

$$\lim_{h\to 0}(f(\xi+h)-f(\xi-h))=0.$$

Από την ειδική συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

και τον $\xi=0$ τί συμπεραίνετε για την ισχύ του αντιστρόφου;

Άσκηση 3. [α] Αποδείξτε ότι η

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Z}\\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{Z}$ και συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
[β] Σε ποιά σημεία είναι η

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

συνεχής;

Άσκηση 4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Σχεδιάστε το γράφημα αυτής της συνάρτησης.

Άσκηση 5. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη στο I.
Αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα J, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.
Αν, επιπλέον, η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής στο J.

Άσκηση 6. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$$

είναι συνεχής στον ξ.
Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$x^x, \quad (x^2 - 3)^{(x-2)/(x+2)}, \quad (\log x)^{\log x}$$

είναι συνεχείς. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

Άσκηση 7. Βρείτε τα

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{[x]/x}, \quad \lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)}, \quad \lim_{x\to-\infty} \cos\frac{\sin x}{x}.$$

Ποιά πρόταση χρησιμοποιήσατε;

Άσκηση 8. Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{h} = m \in \mathbb{R},$$

αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τί γίνεται αν δεν υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ότι είναι αριθμός;

Άσκηση 9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a) \neq 0$ και $f(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f στο $[a, b]$.

Άσκηση 10. [α] Έστω διάστημα I το οποίο δεν είναι μονοσύνολο και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.
Αν ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.
[β] Αν η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει $f(r) = r^2$ για κάθε ρητό $r \in [0, 2]$, βρείτε τον $f(\sqrt{2})$.

Άσκηση 11. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών

$$\Big(\exp\frac{1+(-1)^n}{n}\Big), \quad \Big(\log(1+\tfrac{1}{n})\Big), \quad \Big(n\log(1+\tfrac{1}{n})\Big),$$

$$\Big(\exp\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}\Big), \quad \Big(\tan\frac{1}{2^n}\Big), \quad \Big(2^{\log(\cos(1/n))}\Big).$$

Ποιά πρόταση χρησιμοποιήσατε;

Άσκηση 12. Έστω
$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$
Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση
$$p(x) = 2(x-a_1)\cdots(x-a_n) + 3(x-b_1)\cdots(x-b_n)$$
έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 13. [α] Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $f(a) \leq g(a)$ και $f(b) \geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.
[β] Αποδείξτε ότι, αν η $f : [a,b] \to [a,b]$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.
[γ] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν τα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ δεν ισχύουν, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Άσκηση 14. Έστω $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1,1]$. Έστω ότι ισχύει
$$x^2 + f(x)^2 = 1 \quad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$
Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

Άσκηση 15. [α] Έστω διάστημα I και $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \dots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τί συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;
Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει
$$(h(x) - f_1(x))\cdots(h(x) - f_n(x)) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I.$$
Τί συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \dots, f_n$;
[β] Έστω το διάστημα $I = [1, +\infty)$ ή $I = [0,1]$ και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει
$$(h(x) - x)(h(x) - x^2)(h(x) - x^3) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in I.$$
Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$.
Αν $I = [0, +\infty)$, τότε - με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις - ποιές είναι οι δυνατότητες για την h;

Άσκηση 16. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b). Αποδείξτε ότι, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε
$$f(x_0) > \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{και} \quad f(x_0) > \lim_{x\to b} f(x),$$
τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο (a,b). Ποιό είναι το σύνολο τιμών της f;
Διατυπώστε τα προηγούμενα ώστε να προκύπτει ελάχιστη τιμή της f στο (a,b).

Άσκηση 17. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, όχι δεξιό άκρο του I, και $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x, x+\delta) \cap I$ ώστε $f(x) \leq f(x')$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

Άσκηση 18. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δυο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I.

Άσκηση 19. Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των

$$-2x^3 + x^2 - 5x + 6, \quad x^4 - 2x^2 + 7, \quad x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1\,;$$

Άσκηση 20. Βρείτε τα σύνολα τιμών της $x + \frac{1}{x}$ στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.

Άσκηση 21. Πόσες *ακριβώς* λύσεις έχει η εξίσωση

$$\tfrac{3}{x} + \tfrac{2}{x-1} + \tfrac{1}{x-2} + \tfrac{5}{x-3} = c\,;$$

Η απάντηση πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

Άσκηση 22. Έστω οι συναρτήσεις $x^2 + 2x$ στο $[0, 1]$, $\frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$ και $\frac{1}{x^2+1}$ στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεις;

Άσκηση 23. Έστω η συνάρτηση

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Αν $a_0 a_n < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $P(\xi) = 0$.

Άσκηση 24. Έστω οι $f_1 : (-\infty, 0) \to (-\infty, +\infty)$, $f_2 : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ με τον ίδιο τύπο

$$f_1(x) = f_2(x) = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{x}).$$

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_2 είναι γνησίως αύξουσες με κοινό σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Χωρίς να βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχειά τους;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τότε ισχύει

$$g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0 \quad \text{για κάθε } y \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Αντιστρόφως, έστω $g : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει η (1). Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

Άσκηση 25. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^3 - 3x.$$

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_3 είναι γνησίως αύξουσες και η f_2 γνησίως φθίνουσα και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, τότε ισχύει

$$g(y)^3 - 3g(y) = y \tag{2}$$

για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει η (2) για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι $g = {f_3}^{-1}$. Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι $g = {f_1}^{-1}$. Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$ είτε $g = {f_3}^{-1}$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.