ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Άσκηση 1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσσώρευσης του A και έστω ότι υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο ξ ώστε να ισχύει

$$f(x) - f(\xi) = g(x)(x - \xi) \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ.

Άσκηση 2. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του a είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$; είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$; είναι η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$; είναι η f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$; είναι η f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Άσκηση 3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, βρείτε το

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(\xi + h)}{f(\xi)} \right)^{1/h}.$$

Άσκηση 4. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο ξ, βρείτε το

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)g(\xi) - f(\xi)g(x)}{x - \xi}.$$

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Άσκηση 6. Έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0.$$

Άσκηση 7. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(x_0) = 1$ για κάποιο $x_0 \in (a, b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$|f'(\xi)| \geq \frac{2}{b - a}.$$

Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$|f'(\xi)| > \frac{2}{b - a}.$$

Άσκηση 8. Έστω f, g συνεχείς στο $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, έστω $f(0) = g(0) = 0$ και έστω ότι ισχύει $f'(x), g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \qquad \text{για κάθε } x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)$$

και

$$x < \sin x < \frac{2}{\pi}x \qquad \text{για κάθε } x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big).$$

Άσκηση 10. Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο διαφορετικό από αυτά τα δυο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$f''(\xi) = 0.$$

Άσκηση 11. Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και ισχύει $f(x) = 0$ για δυο διαφορετικές τιμές του $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$f'''(\xi) = 0.$$