

Ανάλυση 1

Δεύτερη πρόοδος και τελικό διαγώνισμα.

Όσοι γράφετε το τελικό διαγώνισμα λύστε όλα τα θέματα σε τρεις ώρες. Όσοι γράφετε την δεύτερη πρόοδο λύστε τα πέντε τελευταία θέματα σε μιάμιση ώρα. Περισσότερο από τον αριθμό των θεμάτων που θα λύσετε με ενδιαφέρει η ποιότητα των λύσεών σας.

1. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
2. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός l . Αποδείξτε ότι $l \leq \inf A$ αν και μόνο αν ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$.
3. Έστω μη-κενά σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A$.
4. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός u άνω φράγμα του A . Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $x_n \rightarrow u$, αποδείξτε ότι $\sup A = u$.
5. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με n -οστούς όρους

$$[e^n]e^{-n}, \quad \frac{(2n)!}{5^n(n!)^2}.$$

6. Έστω συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και ξ σημείο συσσώρευσης του A . Αν $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ και αν η g είναι συνεχής στο η , αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = g(\eta).$$

7. Εξετάστε την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

8. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα $[1, +\infty)$ και ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύει

$$f(x) \leq g(x) \leq f(2x) \quad \text{για κάθε } x \geq 1,$$

αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ και είναι αριθμός.

9. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0, 3)$. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4,$$

αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 3)$.

10. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) . Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε σημείο διαφορετικό από αυτά τα δυο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

Υπόδειξη: Ίσως σας βοηθήσει ένα πρόχειρο σχήμα που να δείχνει το ευθύγραμμο τμήμα και τα τρία σημεία.

Μιχάλης Παπαδημητράκης.

28-1-2014.