

Ανάλυση 1

Πρώτη πρόοδος.

Λύσεις των θεμάτων.

1. Βρείτε το infimum και το supremum του συνόλου

$$\mathbb{N} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Λύση. Ονομάζω

$$A = \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, διότι περιέχει το \mathbb{N} και το \mathbb{N} δεν είναι άνω φραγμένο.

[Δεν χρειάζεται παραπάνω αιτιολόγηση. Αν κάποιος θέλει να δώσει επιπλέον εξήγηση έχει δυο τρόπους.

(α) Αν u είναι τυχών αριθμός, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > u$. Άρα υπάρχει $n \in A$ ώστε $n > u$. Άρα ο τυχών u δεν είναι άνω φράγμα του A . Άρα το A δεν έχει κανένα άνω φράγμα.

(β) Έστω ότι το A είναι άνω φραγμένο και έστω u ένα άνω φράγμα του A . Τότε ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Άρα ισχύει $n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα ο u είναι άνω φράγμα του \mathbb{N} και αυτό είναι άτοπο.]

Επειδή το A δεν είναι άνω φραγμένο, συνεπάγεται

$$\sup A = +\infty.$$

Είναι προφανές ότι όλα τα στοιχεία του A είναι θετικοί αριθμοί. Άρα ο 0 είναι κάτω φράγμα του A . Θα αποδείξω ότι ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A . Αυτό γίνεται με δυο τρόπους.

(α) Έστω τυχών $l > 0$. Γνωρίζουμε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$. Άρα υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι μικρότερο από τον l . Άρα ο τυχών $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A . Άρα ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A .

(β) Έστω ότι υπάρχει $l > 0$ ο οποίος είναι κάτω φράγμα του A . Τότε θα ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Άρα θα ισχύει $l \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα θα ισχύει $n \leq \frac{1}{l}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το \mathbb{N} θα έχει άνω φράγμα τον $\frac{1}{l}$. Άτοπο.

Άρα, λοιπόν,

$$\inf A = 0.$$

□

2. Δίνονται αριθμοί a, b . Υποθέστε ότι κάθε ρητός ο οποίος είναι $> b$ είναι και $\geq a$. Αποδείξτε ότι $b \geq a$.

Λύση. Έστω

$$b < a.$$

Λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει κάποιος ρητός r ώστε

$$b < r < a.$$

Άρα υπάρχει ρητός ο οποίος είναι $> b$ αλλά δεν είναι $\geq a$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η υπόθεση λέει ότι κάθε ρητός ο οποίος είναι $> b$ είναι και $\geq a$. Άρα $b \geq a$. □

3. Έστω μη-κενό σύνολο A . Αποδείξτε ότι για κάθε $\gamma > \inf A$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $\inf A \leq x < \gamma$.

(Προσέξτε: σας ζητώ να αποδείξετε την δεύτερη ιδιότητα του $\inf A$.)

Λύση. Με δύο τρόπους.

(α) Έστω τυχών $\gamma > \inf A$. Επειδή το $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A , ο γ δεν είναι κάτω φράγμα του A . Άρα υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $< \gamma$. Δηλαδή υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < \gamma$. Και επειδή το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A , για αυτόν τον ίδιο $x \in A$ ισχύει

$$\inf A \leq x < \gamma.$$

(β) Έστω τυχών $\gamma > \inf A$. Υποθέτω ότι δεν υπάρχει κανένας $x \in A$ ώστε $\inf A \leq x < \gamma$. Δηλαδή για κάθε $x \in A$ δεν ισχύει η $\inf A \leq x < \gamma$. Και, επειδή κανένας $x \in A$ δεν είναι $< \inf A$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\gamma \leq x$. Άρα ο γ είναι κάτω φράγμα του A . Αυτό είναι άτοπο διότι $\gamma > \inf A$ και το $\inf A$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A . Άρα υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $\inf A \leq x < \gamma$. \square

4. Έστω μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A και έστω $l = \inf A$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στο A η οποία συγκλίνει στο l .

Λύση. Επειδή το A είναι κάτω φραγμένο, το $\inf A$ είναι αριθμός.

Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\inf A$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο του A , το οποίο ονομάζω x_n , τέτοιο ώστε

$$\inf A \leq x_n < \inf A + \frac{1}{n}.$$

Τώρα, για κάθε n έχω ένα αντίστοιχο στοιχείο του A , οπότε έτσι δημιουργώ μια ακολουθία (x_n) στο A οι όροι της οποίας ικανοποιούν την παραπάνω διπλή ανισότητα. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται

$$x_n \rightarrow \inf A.$$

\square

5. Αν $x_n \rightarrow x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n , αποδείξτε ότι

$$\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = x.$$

Λύση. Επειδή ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n , ο x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Θα αποδείξω ότι ο x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα αυτού του συνόλου. Αυτό γίνεται με δύο τρόπους.

(α) Έστω ότι υπάρχει $u < x$ το οποίο είναι άνω φράγμα του $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Δηλαδή ισχύει

$$x_n \leq u$$

για κάθε n . Επειδή $x_n \rightarrow x$, συνεπάγεται

$$x \leq u$$

και καταλήγω σε άτοπο. Άρα δεν υπάρχει $u < x$ το οποίο είναι άνω φράγμα του $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, οπότε το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 (β) Έστω τυχών $u < x$. Επειδή $x_n \rightarrow x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$u < x_n.$$

Άρα υπάρχουν στοιχεία του $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (τουλάχιστον ένα) τα οποία είναι $> u$. Άρα ο τυχών $u < x$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, οπότε ο x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα αυτού του συνόλου. \square

6. Βρείτε τα \liminf και \limsup των ακολουθιών με n -οστούς όρους

$$\frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right], \quad \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

Λύση. Για κάθε n ισχύει

$$\frac{n}{3} - 1 < \left[\frac{n}{3} \right] \leq \frac{n}{3}$$

και, πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] \leq \frac{1}{3}.$$

Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται

$$\frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Άρα

$$\underline{\lim} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] = \overline{\lim} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{3} \right] = \frac{1}{3}.$$

Για $n = 1, n = 2, n = 3$ παίρνουμε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{6\pi}{3} = 0.$$

Από εκεί και πέρα αυτές οι τρεις τιμές επαναλαμβάνονται περιοδικά, διότι τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχούν στις γωνίες $\frac{2n\pi}{3}$ είναι ακριβώς αυτά που αντιστοιχούν στις τρεις πρώτες γωνίες $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}$. Άρα η ακολουθία είναι η

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots$$

Άρα

$$\underline{\lim} \sin \frac{2n\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{\lim} \sin \frac{2n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[Όποιος θέλει μπορεί να γράψει τον ακριβή τύπο του n -οστού όρου:

$$\sin \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{αν } n = 3k + 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{αν } n = 3k + 2 \\ 0, & \text{αν } n = 3k \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sin \frac{2(3k+1)\pi}{3} &= \sin \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{2(3k+2)\pi}{3} &= \sin \left(2k\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \frac{2(3k)\pi}{3} &= \sin(2k\pi) = 0\end{aligned}$$

Αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.] □

7. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο στην απόδειξη θεωρούμε το σύνολο των όρων της ακολουθίας.

Λύση. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Θεωρώ το σύνολο τιμών

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

της ακολουθίας.

Επειδή η ακολουθία είναι άνω φραγμένη, το X είναι άνω φραγμένο. Το X είναι προφανώς μη-κενό, οπότε από την Ιδιότητα Supremum συνεπάγεται ότι το X έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο είναι αριθμός. Ονομάζω

$$x = \sup X$$

και θα αποδείξω ότι $x_n \rightarrow x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Από την δεύτερη ιδιότητα του $x = \sup X$ συνεπάγεται ότι υπάρχει στοιχείο του X ανάμεσα στους $x - \epsilon$ και x . Δηλαδή, υπάρχει n_0 ώστε

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x.$$

Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα και επειδή ο x είναι άνω φράγμα του X συνεπάγεται ότι ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Και επειδή $x < x + \epsilon$, ισχύει

$$x - \epsilon < x_n \leq x + \epsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει τελικά

$$|x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα

$$x_n \rightarrow x.$$

Δεν γνωρίζουμε (αυτό θέλουμε να αποδείξουμε) ότι μια άνω φραγμένη, αύξουσα ακολουθία έχει όριο. Γνωρίζουμε, όμως, ότι κάθε άνω φραγμένο μη-κενό σύνολο έχει supremum. Γι αυτό επιλέγουμε να ασχοληθούμε με το σύνολο των όρων της ακολουθίας. Το supremum αυτού του συνόλου, η ύπαρξη του οποίου είναι εγγυημένη από την Ιδιότητα Supremum, θα λειτουργήσει ως υποψήφιο όριο της ακολουθίας. □

Μιχάλης Παπαδημητράκης.

30-11-2013.