ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f_n{}'$ συνεχή στο διάστημα I και*

(i) *υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in I$ ώστε η ακολουθία $(f_n(\xi))$ να συγκλίνει,*

(ii) *υπάρχει συνάρτηση g ώστε $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I.*

Τότε υπάρχει συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και ώστε να ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Έστω
$$f_n(\xi) \to l \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Ορίζουμε την συνάρτηση f στο διάστημα I με τύπο:
$$f(x) = l + \int_\xi^x g \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$
Δηλαδή, η f είναι ένα συγκεκριμένο αόριστο ολοκλήρωμα της g στο I.

Επειδή κάθε $f_n{}'$ είναι συνεχής στο I και επειδή $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I, συνεπάγεται ότι η g είναι κι αυτή συνεχής στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα και από το Θεμελιώδες Θεώρημα συνεπάγεται ότι ισχύει
$$f'(x) = g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$
Τώρα θα αποδείξουμε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I, δηλαδή ότι για κάθε $x \in I$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$.

Αν $x = \xi$, τότε $f_n(x) = f_n(\xi)$ και $f(x) = f(\xi) = l$, οπότε από την (1) συνεπάγεται ότι $f_n(x) \to f(x)$.

Οπότε έστω $x \neq \xi$.

Για κάθε $t \in [\xi, x]$ ή $[x, \xi]$ ισχύει $|f_n{}'(t) - g(t)| \leq \|f_n{}' - g\|_I$, οπότε
$$\Big| \int_\xi^x f_n{}' - \int_\xi^x g \Big| \leq \|f_n{}' - g\|_I |x - \xi|. \tag{2}$$
Επειδή $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I, συνεπάγεται ότι $\|f_n{}' - g\|_I \to 0$ και, επομένως,
$$\int_\xi^x f_n{}' \to \int_\xi^x g.$$
Αυτό γράφεται
$$f_n(x) - f_n(\xi) \to \int_\xi^x g$$
και, επειδή $f_n(\xi) \to l$, συνεπάγεται ότι
$$f_n(x) \to l + \int_\xi^x g = f(x).$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Τώρα έστω οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα $[a,b]$ του I. Θα αποδείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.
Χρησιμοποιώντας την (2) με το a αντί του ξ, έχουμε ότι για κάθε n και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\ &= \Big| \int_a^x f_n{}' - \int_a^x g \Big| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\le \|f_n{}' - g\|_I (x-a) + |f_n(a) - f(a)| \\ &\le \|f_n{}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \le \|f_n{}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Τέλος, επειδή $\|f_n{}' - g\|_I \to 0$ και $f_n(a) \to f(a)$, συνεπάγεται ότι $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. □

Άσκηση 9.2.1. *Έστω οι συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = xe^{-nx}$ στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.*
Λύση: Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0,+\infty)$. Αυτό είναι εύκολο:

$$f_n(x) = xe^{-nx} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty),$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.
Για να υπολογίσουμε το $\|f_n\|_{[0,+\infty)}$, θα δούμε πώς μεταβάλλεται το

$$|f_n(x)| = f_n(x) = xe^{-nx}$$

στο $[0,+\infty)$.
Υπολογίζουμε την παράγωγο:

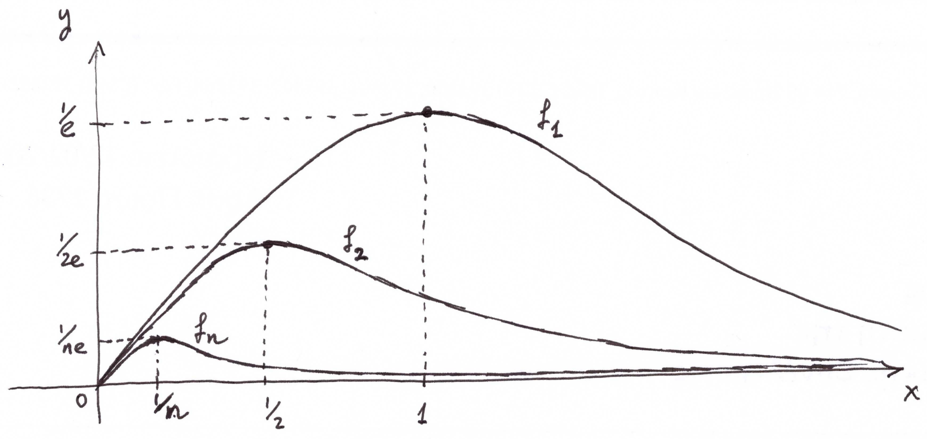
$$f_n{}'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1-nx).$$

Επομένως, η f_n είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n},+\infty)$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|f_n(x)| = f_n(x)$ είναι στο σημείο $x = \frac{1}{n}$ και άρα

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \max\{|f_n(x)| \mid x \in [0,+\infty)\} = f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{en}.$$

Άρα $\|f_n\|_{[0,+\infty)} \to 0$, οπότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Στο σχήμα φαίνονται μερικά από τα γραφήματα των f_n. Είναι σαφές ότι το γράφημα της f_n προσεγγίζει τον x-άξονα "ομοιόμορφα" στο $[0,+\infty)$, αφού το μέγιστο ύψος του γραφήματος πάνω από τον x-άξονα τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$.



Άσκηση 9.2.2. *Έστω οι συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ στο διάστημα $[0,1]$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αλλά $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.*

Λύση: Έχουμε

$$f_n(x) = x^n(1-x^n) \to \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,1].$$

Για να υπολογίσουμε το $\|f_n\|_{[0,1]}$, θα δούμε πώς μεταβάλλεται το

$$|f_n(x)| = f_n(x) = x^n(1-x^n)$$

στο $[0,1]$.
Υπολογίζουμε την παράγωγο:

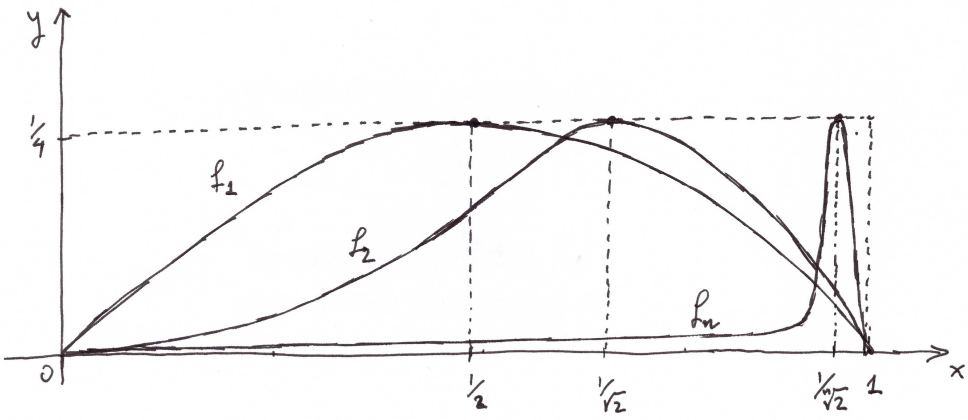
$$f_n{}'(x) = nx^{n-1}(1-x^n) - nx^n x^{n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n).$$

Άρα η f_n είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1]$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|f_n(x)| = f_n(x)$ είναι στο σημείο $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, οπότε

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \max\{|f_n(x)| \mid x \in [0,1]\} = f_n\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) = \frac{1}{4}.$$

Άρα $\|f_n\|_{[0,1]} \not\to 0$, οπότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Στο σχήμα φαίνονται μερικά από τα γραφήματα των f_n. Είναι σαφές ότι το γράφημα της f_n *δεν* προσεγγίζει τον x-άξονα "ομοιόμορφα" στο $[0,1]$, αφού το μέγιστο ύψος του γραφήματος πάνω από τον x-άξονα μένει σταθερά ίσο με $\frac{1}{4}$ όταν το n μεγαλώνει. Παρατηρήστε ότι, επειδή $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to 1$, η κορυφή του γραφήματος της f_n μετακινείται πάνω στην οριζόντια ευθεία σε ύψος $\frac{1}{4}$ προς τα δεξιά προς το σημείο $(1, \frac{1}{4})$ όταν το n μεγαλώνει. Πάντως, το καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}}]$ κατεβαίνει προς τον x-άξονα όταν το n μεγαλώνει.



y
1/4
f_1
f_2
f_n
0
1/2
$1/\sqrt{2}$
$1/\sqrt[n]{2}$
1
x