ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 6.2.4. *Έστω f φραγμένη στο $[a,b]$ και δυο ακολουθίες διαμερίσεων του $[a,b]$, η (Δ_n') και η (Δ_n''), έτσι ώστε*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') \to \int_a^b f \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to \int_a^b f.$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'')$$

και, επομένως,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

για κάθε n.
Παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0,$$

οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα η αρχική σχέση γράφεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'')$$

και, επομένως, έχουμε ότι ισχύει

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

και

$$0 \leq \int_a^b f - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

για κάθε n.
Παίρνοντας, πάλι, όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') \to \int_a^b f \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to \int_a^b f.$$

Άσκηση 6.2.5. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(r)=0$ για κάθε ρητό $r \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = 0$.*

Λύση: Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$.
Στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Άρα η f έχει τιμή 0 σε τουλάχιστον ένα σημείο του $[x_{k-1}, x_k]$. Δηλαδή, το 0 είναι στοιχείο του συνόλου τιμών $\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$. Τώρα, τα l_k, u_k έχουν ορισθεί ως τα infimum και supremum, αντιστοίχως, αυτού του συνόλου τιμών, οπότε

$$l_k \le 0 \le u_k.$$

Αυτό ισχύει σε κάθε υποδιάστημα, οπότε έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \le 0, \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \ge 0.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν,ότι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \le 0 \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta). \tag{1}$$

Επίσης, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta). \tag{2}$$

Τώρα, έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας συνεπάγεται ότι υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ για την οποία ισχύει

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Επομένως, για την συγκεκριμένη Δ, από τις (1) και (2) συνεπάγεται

$$\Big| \int_a^b f - 0 \Big| < \epsilon$$

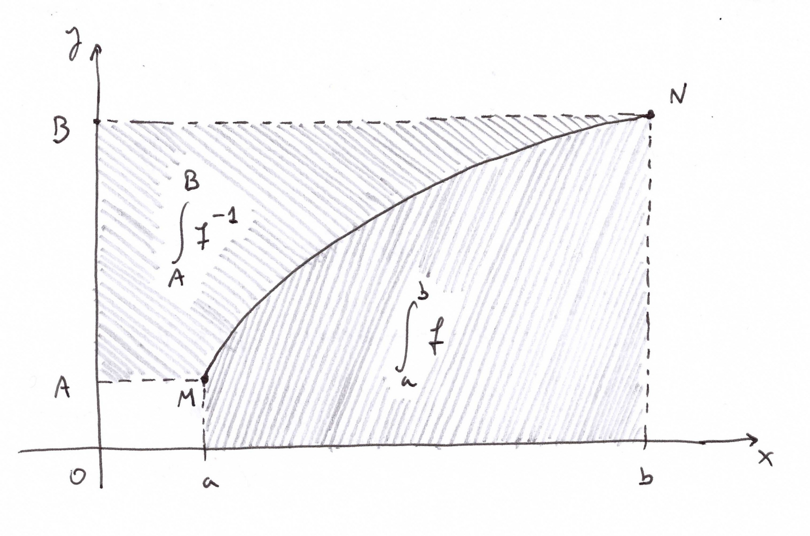
και, επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\int_a^b f = 0$.

Άσκηση 6.3.2. *Έστω f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A,B]$, όπου $A = f(a), B = f(b)$. Έτσι, ορίζεται η f^{-1} στο $[A,B]$ και αυτή είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$ με σύνολο τιμών το $[a,b]$. Ως συνεχείς, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η f^{-1} είναι ολοκληρώσιμη στο $[A,B]$. Αποδείξτε ότι*

$$\int_a^b f + \int_A^B f^{-1} = Bb - Aa.$$

Τέλος, εξηγήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της σχέσης όταν $0 \le a < b$ και $0 \le A < B$.

Λύση: Αρχίζουμε με το γεωμετρικό περιεχόμενο της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε.
Στο σχήμα φαίνεται το γράφημα της f ως συνάρτηση από το $[a,b]$ στο $[A,B]$ και το γράφημα της f^{-1} ως συνάρτηση από το $[A,B]$ στο $[a,b]$. Τα δυο γραφήματα ταυτίζονται με την ίδια καμπύλη. Προσέξτε: αν θέλαμε να τοποθετήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1} σε οριζόντιο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της σε κατακόρυφο άξονα, θα κάναμε ανάκλαση του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο του επιπέδου και τότε το γράφημα της f^{-1} θα ήταν το συμμετρικό του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο. Όμως, εμείς τώρα κρατάμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1}, δηλαδή την y, στον κατακόρυφο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της, δηλαδή την x, στον οριζόντιο άξονα.



Τώρα, το $\int_a^b f$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου $abNM$ και το $\int_A^B f^{-1}$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου $ABNM$. Άρα το άθροισμα των δυο ολοκληρωμάτων είναι ίσο με το εμβαδό του χωρίου $aMABNb$, το οποίο είναι ίσο με την διαφορά των εμβαδών των ορθογωνίων $0bNB$ και $0aMA$, δηλαδή ίσο με $Bb - Aa$.

Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Θεωρούμε και τα αντίστοιχα σημεία $y_k = f(x_k)$, οπότε, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_{k-1} < y_k < \ldots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Έτσι ορίζεται μια αντίστοιχη διαμέριση $\Delta' = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ του $[A, B]$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$l_k = f(x_{k-1}) = y_{k-1}, \qquad u_k = f(x_k) = y_k,$$

οπότε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}(x_k - x_{k-1}), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k - x_{k-1}). \quad (3)$$

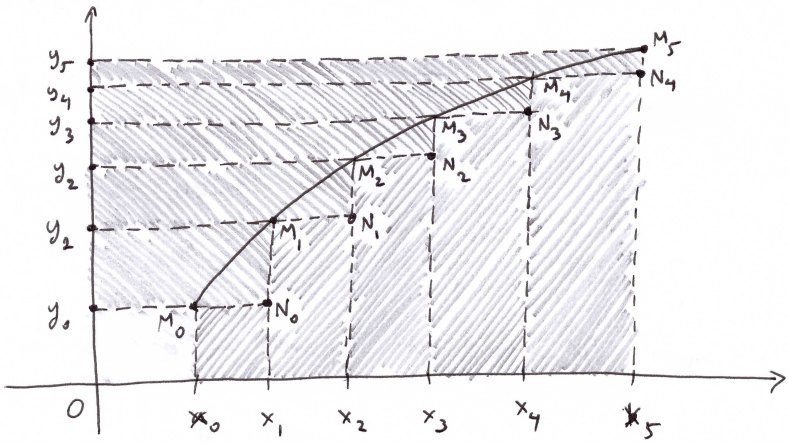
Επειδή ισχύει $f^{-1}(y_k) = x_k$ για κάθε k και επειδή η f^{-1} είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα, ισχύει, εντελώς ανάλογα, και

$$\underline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(y_k - y_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') = \sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - y_{k-1}). \quad (4)$$

Από τις (3), (4) έχουμε:

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') &= \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k-y_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}x_k-\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}x_{k-1}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n} x_k y_k-\sum_{k=1}^{n} x_k y_{k-1}\\ &= -\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}x_{k-1}+\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n y_n - x_0 y_0\\ &= Bb-Aa.\end{aligned} \tag{5}$$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της τελευταίας ισότητας φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι ίσο με το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων $x_0x_1N_0M_0$, $x_1x_2N_1M_1$, $x_2x_3N_2M_2$, $x_3x_4N_3M_3$, $x_4x_5N_4M_4$. Το $\overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta')$ είναι ίσο με το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων $y_0y_1M_1N_0$, $y_1y_2M_2N_1$, $y_2y_3M_3N_2$, $y_3y_4M_4N_3$, $y_4y_5M_5N_4$.



Εντελώς όμοια, πάλι από τις (3), (4) έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\underline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') = Bb-Aa. \tag{6}$$

Όπως πριν, το γεωμετρικό περιεχόμενο της τελευταίας ισότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.