ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Συνεχίζουμε την λύση της άσκησης 6.3.2.
Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ υπάρχει μια αντίστοιχη διαμέριση Δ' του $[A,B]$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') = Bb - Aa, \tag{1}$$

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') = Bb - Aa. \tag{2}$$

Αυτές είναι οι σχέσεις (5), (6) του προηγούμενου μαθήματος.
Τώρα θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας για την f συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon. \tag{3}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των ισοτήτων (1), (2) και χρησιμοποιώντας την (3), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$0 \le \overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') - \underline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') < \epsilon. \tag{4}$$

Θυμόμαστε και τις γνωστές σχέσεις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \tag{5}$$

$$\underline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') \le \int_A^B f^{-1} \le \overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta'). \tag{6}$$

Από τις (3), (5) βρίσκουμε ότι

$$0 \le \int_a^b f - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon \tag{7}$$

και από τις (4), (6) ότι

$$0 \le \overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta') - \int_A^B f^{-1} < \epsilon. \tag{8}$$

Αφαιρώντας τις (7), (8), βρίσκουμε

$$-\epsilon < \Big(\int_a^b f + \int_A^B f^{-1}\Big) - \Big(\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(f^{-1};A,B;\Delta')\Big) < \epsilon,$$

οπότε η (1) δίνει

$$\Big|\Big(\int_a^b f + \int_A^B f^{-1}\Big) - (Bb - Aa)\Big| < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\int_a^b f + \int_A^B f^{-1} = Bb - Aa$.

Άσκηση 6.4.8. *Έστω f, g συνεχείς στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \int_a^b g$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.*

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h = f - g.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b h = 0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h(\xi) = 0$.
Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.
Επειδή η h είναι συνεχής στο (a, b), συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ είτε ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση. Αυτά που ακολουθούν είναι παρόμοια και στην δεύτερη περίπτωση.
Επειδή η h είναι συνεχής στα a, b και επειδή ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, συνεπάγεται

$$h(a) = \lim_{x \to a+} h(x) \geq 0, \qquad h(b) = \lim_{x \to b-} h(x) \geq 0.$$

Άρα ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a.b]$.
Επομένως, επειδή $\int_a^b h = 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $h(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ στο οποίο η h είναι συνεχής. Αυτό είναι άτοπο, διότι η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχουμε ότι ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.
Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h(\xi) = 0$ και, επομένως, $f(\xi) = g(\xi)$.

Τώρα θα δούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος που έδωσε ο Riemann.

Έστω f φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$ και διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$, οπότε

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Θεωρούμε και μια αντίστοιχη (αλλά τυχούσα) **επιλογή ενδιάμεσων σημείων** $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, όπου κάθε ξ_k είναι ένα αυθαίρετο σημείο του αντίστοιχου υποδιαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$.

Είναι σαφές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές Ξ ενδιάμεσων σημείων για την ίδια διαμέριση Δ του $[a, b]$.

Τέλος, για κάθε τέτοια διαμέριση Δ του $[a, b]$ και για κάθε αντίστοιχη τέτοια επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων σχηματίζουμε το λεγόμενο **άθροισμα Riemann**

$$\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Επειδή η τιμή $f(\xi_k)$ είναι στοιχείο του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, ισχύει

$$l_k \leq f(\xi_k) \leq u_k$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$, οπότε

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1})$$

και άρα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Δηλαδή, όταν πρόκειται για την ίδια διαμέριση, ένα άθροισμα Riemann είναι ανάμεσα στο κάτω άθροισμα Darboux και στο άνω άθροισμα Darboux.

Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης Δ και το συμβολίζουμε $w(\Delta)$ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ. Δηλαδή,

$$w(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} \,|\, 1 \leq k \leq n\}.$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Riemann έχει ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω f φραγμένη στο $[a,b]$. Η f χαρακτηρίζεται* **(Riemann) ολοκληρώσιμη** *στο $[a,b]$ αν υπάρχει κάποιος αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει*

$$\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \mathcal{I}\big| < \epsilon.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε ο αριθμός $\mathcal{I}$ ονομάζεται **(Riemann) ολοκλήρωμα** *της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται*

$$\int_a^b f = \mathcal{I}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Darboux, τον οποίο είδαμε εξ αρχής, και ο ορισμός που έδωσε ο Riemann είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον έναν ορισμό, τότε είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα και με τον άλλον ορισμό και οι τιμές των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων της ταυτίζονται.* Αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος 6.3 στο βιβλίο και η απόδειξή του είναι, ίσως, η δυσκολότερη όλου του βιβλίου!

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ και αντίστοιχη ακολουθία επιλογών (Ξ_n) ενδιάμεσων σημείων. Δηλαδή κάθε Ξ_n είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την αντίσοιχη Δ_n. Αν $w(\Delta_n) \to 0$, τότε*

$$\Sigma(f;a,b;\Delta_n,\Xi_n) \to \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (σύμφωνα με τον ορισμό του Riemann), υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \int_a^b f\right| < \epsilon.$$

Τώρα, επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, ισχύει τελικά $w(\Delta_n) < \delta$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\Sigma(f;a,b;\Delta_n,\Xi_n) - \int_a^b f\right| < \epsilon.$$

Άρα $\Sigma(f;a,b;\Delta_n,\Xi_n) \to \int_a^b f$. □

Μια όχι τόσο αυστηρή αλλά πολύ συνηθισμένη και παραστατική διατύπωση της τελευταίας πρότασης είναι η εξής.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τα αθροίσματα Riemann της f συγκλίνουν στο *ολοκλήρωμά της όταν το πλάτος των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνει στο* 0.

Υπάρχει και το ανάλογο σύμβολο:

$$\lim_{w(\Delta)\to 0} \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \int_a^b f.$$

Σύμφωνα με την τελευταία πρόταση, *αν γνωρίζουμε* ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση f *είναι* ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της θεωρώντας μια ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$ και, για κάθε Δ_n, μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων γι αυτήν. Υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ και, τέλος, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα μέσω του ορίου $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f$. Η μοναδική μας φροντίδα είναι να βρούμε κατάλληλες Δ_n και αντίστοιχες Ξ_n ώστε να υπολογίζονται εύκολα τα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$.

Στην συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα για να καταλάβουμε καλύτερα την μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος μέσω των αθροισμάτων Riemann.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση x στο διάστημα $[a, b]$.
Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } k = 0, \ldots, n.$$

Τότε για κάθε k έχουμε ότι $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, οπότε

$$w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0.$$

Για κάθε Δ_n παίρνουμε ως επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ_n. Δηλαδή,

$$\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } k = 1, \ldots, n.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\Sigma(x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) &= \sum_{k=1}^n \xi_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big(na + \frac{b-a}{n} + 2\frac{b-a}{n} + \cdots + n\frac{b-a}{n}\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big(na + \frac{b-a}{n}(1 + 2 + \cdots + n)\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}\Big(na + \frac{b-a}{n}\,\frac{n(n+1)}{2}\Big) \\
&= (b-a)a + (b-a)^2\frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, από την τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \Sigma(x; a, b; \Delta_n, \Xi_n),$$

οπότε

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\Big((b-a)a + (b-a)^2\frac{n+1}{2n}\Big) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$