ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΝΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση e^x στο διάστημα $[a,b]$.
Πάλι, για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ για κάθε k, οπότε

$$w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0.$$

Για κάθε Δ_n παίρνουμε ως επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων τα αριστερά άκρα των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ_n. Δηλαδή,

$$\xi_k = x_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 1, \ldots, n.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\Sigma(e^x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) &= \sum_{k=1}^{n} e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{a+(k-1)\frac{b-a}{n}} \\
&= \frac{b-a}{n}\, e^a\Big(1 + e^{\frac{b-a}{n}} + e^{2\frac{b-a}{n}} + \cdots + e^{(n-1)\frac{b-a}{n}}\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}\, e^a\, \frac{e^{n\frac{b-a}{n}} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \\
&= \frac{b-a}{n}\, e^a\, \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} \\
&= (e^b - e^a)\, \frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}.
\end{aligned}$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, από την τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b e^x\, dx = \lim_{n\to+\infty} \Sigma(e^x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) = \lim_{n\to+\infty} (e^b - e^a)\, \frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1}.$$

Για να βρούμε το τελευταίο όριο χρησιμοποιούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \big(e^x\big)'_{x=0} = 1$$

και βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} = 1.$$

Άρα

$$\int_a^b e^x\, dx = \lim_{n\to+\infty} (e^b - e^a)\, \frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}} - 1} = e^b - e^a.$$

Παράδειγμα. Έστω $0 < a < b$ και η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ στο διάστημα $[a, b]$.
Τώρα δεν θα θεωρήσουμε διαμερίσεις σε ισομήκη διαστήματα διότι δεν θα προκύψουν εύκολοι υπολογισμοί των αθροισμάτων Riemann.
Για κάθε n θεωρούμε έναν αριθμό $\mu > 1$, την ακριβή τιμή του οποίου θα βρούμε σε λίγο, και την διαμέριση $\Delta_n = \{x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$, όπου τα διαιρετικά σημεία αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο μ. Δηλαδή,

$$x_k = a\mu^k \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Για να αποτελούν αυτά τα σημεία διαμέριση του $[a, b]$ θα πρέπει να είναι $x_n = b$, οπότε

$$a\mu^n = b.$$

Λύνοντας αυτήν την εξίσωση, βρίσκουμε

$$\mu = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος της Δ_n σκεφτόμαστε ότι

$$x_k - x_{k-1} = a\mu^k - a\mu^{k-1} = a(\mu - 1)\mu^{k-1}$$

και ότι, επειδή $\mu > 1$, όταν αυξάνει το k αυξάνει και το $x_k - x_{k-1}$. Άρα το υποδιάστημα με το μεγαλύτερο μήκος είναι το τελευταίο, οπότε

$$w(\Delta_n) = x_n - x_{n-1} = a\mu^n - a\mu^{n-1} = b - \frac{b}{\mu} = b - b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \to b - b = 0.$$

Κατόπιν, για κάθε Δ_n παίρνουμε ως επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων τα αριστερά άκρα των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ_n. Δηλαδή,

$$\xi_k = x_{k-1} = a\mu^{k-1} \qquad \text{για } \ k = 1, \ldots, n.$$

Τώρα, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\Sigma\Big(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n, \Xi_n\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a\mu^{k-1}}(a\mu^k - a\mu^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\mu - 1) = n(\mu - 1) = n\Big(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\Big).\end{aligned}$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, από την τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \Sigma\Big(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n, \Xi_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\Big).$$

Για να βρούμε το τελευταίο όριο χρησιμοποιούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\rho^x - 1}{x} = \big(\rho^x\big)'_{x=0} = \log \rho$$

και βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \log \frac{b}{a}.$$

Άρα

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log \frac{b}{a}.$$

Η αξία της τελευταίας πρότασης για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική. Λίγο αργότερα θα γνωρίσουμε την πιο απλή μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Πάντως, τα αθροίσματα Riemann είναι το κατεξοχήν εργαλείο σύνδεσης του ολοκληρώματος με τις πολυάριθμες εφαρμογές του στη Γεωμετρία, στη Φυσική και οπουδήποτε αλλού στην επιστήμη. Σχεδόν κάθε ποσότητα, η οποία εκφράζεται με κάποιο ολοκλήρωμα, πρώτα "ποσοτικοποιείται" προσεγγιστικά με τη μορφή αθροισμάτων Riemann και κατόπιν καταλήγει μέσω ορίου στη μορφή ολοκληρώματος.

Άσκηση 6.5.1. [α] *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) \to \int_a^b f.$$

[β] *Έστω φυσικός $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \to \int_1^p \frac{1}{x}\,dx = \log p.$$

Λύση: [α] Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \dots, n.$$

Τότε $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ για κάθε k, οπότε

$$w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0.$$

Για κάθε Δ_n παίρνουμε ως επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ_n. Δηλαδή,

$$\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 1, \dots, n.$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, συνεπάγεται ότι

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f.$$

Και η απόδειξη τελειώνει παρατηρώντας ότι

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big).$$

[β] Θα γράψουμε το άθροισμα $\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}$ στη μορφή $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ για να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του [α].
Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι το $\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}$ έχει $pn - n = (p-1)n$ προσθετέους. Κατόπιν, γράφουμε

$$\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{pn-n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{(p-1)n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{p-1}{(p-1)n}\sum_{k=1}^{(p-1)n}\frac{1}{1+k\frac{p-1}{(p-1)n}}.$$

Θέτουμε

$$m = (p-1)n$$

και τότε

$$\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{p-1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 + k\frac{p-1}{m}}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι το $\frac{b-a}{m}\sum_{k=1}^{m} f(a + k\frac{b-a}{m})$ για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο διάστημα $[1, p]$. Φυσικά, $m \to +\infty$ όταν $n \to +\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \lim_{m\to+\infty} \frac{p-1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1 + k\frac{p-1}{m}} = \int_1^p \frac{1}{x}\, dx = \log p.$$

Άσκηση 6.4.11. *Βρείτε το άθροισμα της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Λύση: Για να βρούμε το άθροισμα της σειράς πρέπει να βρούμε το όριο της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της.
Έχουμε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &\quad - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &\quad - \Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της άσκησης 6.5.1[β] με $p = 2$, βρίσκουμε ότι

$$s_{2n} \to \log 2.$$

Τέλος,

$$s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n} \to \log 2 + 0 = \log 2.$$

Άρα $s_n \to \log 2$, οπότε

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2.$$