ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος* (X,d) *και* $A \subseteq X$.
Ονομάζουμε **εσωτερικό** *του* A *το σύνολο*

$$A^\circ = \{x \,|\, x \text{ εσωτερικό του } A\}.$$

Ονομάζουμε **σύνορο** *του* A *το σύνολο*

$$\partial A = \{x \,|\, x \text{ συνοριακό του } A\}.$$

Ονομάζουμε **κλειστότητα** *του* A *το σύνολο*

$$\overline{A} = \{x \,|\, x \text{ οριακό του } A\}.$$

Μερικά από τα σχόλια που κάναμε την περασμένη φορά διατυπώνονται ως εξής:

$$A^\circ \subseteq A,$$
$$\{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A\} = (A^c)^\circ, \qquad \{x \,|\, x \text{ εξωτερικό του } A^c\} = A^\circ,$$
$$\partial A = \partial A^c,$$
$$X = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ, \qquad X = A^\circ \cup \partial A^c \cup (A^c)^\circ,$$
$$A \subseteq A^\circ \cup \partial A,$$
$$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A.$$

Στα παραδείγματα που είδαμε με την καμπύλη Γ στο $\mathbb{R}^2$ και με την επιφάνεια Γ στο $\mathbb{R}^3$ (οι χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ με την Ευκλείδεια μετρική), έχουμε

$$A^\circ = A_1, \quad \partial A = \Gamma, \quad \overline{A} = A_1 \cup \Gamma = A \cup \Gamma.$$

Στα παραδείγματα με τα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ (με την Ευκλείδεια μετρική), έχουμε ότι, αν A είναι οποιοδήποτε από τα $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$, τότε

$$A^\circ = (a,b), \quad \partial A = \{a,b\}, \quad \overline{A} = [a,b],$$

αν A είναι το $[a,+\infty)$ ή το $(a,+\infty)$, τότε

$$A^\circ = (a,+\infty), \quad \partial A = \{a\}, \quad \overline{A} = [a,+\infty),$$

αν A είναι το $(-\infty,b]$ ή το $(-\infty,b)$, τότε

$$A^\circ = (-\infty,b), \quad \partial A = \{b\}, \quad \overline{A} = (-\infty,b]$$

και αν $A = \{a\}$, τότε

$$A^\circ = \emptyset, \quad \partial A = \{a\}, \quad \overline{A} = \{a\}.$$

Τέλος, για το υποσύνολο $\mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}$ (με την Ευκλείδεια μετρική) έχουμε

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα. Έστω $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathsf{a} \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$. Το υποσύνολο

$$\Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle = a\}$$

του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο** του $\mathbb{R}^d$ και λέμε ότι ορίζεται από το διάνυσμα a και από τον αριθμό a. Στην περίπτωση $d = 1$ το υποσύνολο αυτό του $\mathbb{R}$ είναι μονοσύνολο, στην περίπτωση $d = 2$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση $d = 3$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$. Η εξίσωση

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle = x_1 a_1 + \cdots + x_d a_d = a$$

ονομάζεται **εξίσωση** του υπερεπιπέδου Γ. Τα σύνολα

$$A_1 = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle > a\}, \qquad A_2 = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle < a\}$$

ονομάζονται **ανοικτοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ. Τα

$$A_1 \cup \Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle \geq a\}, \qquad A_2 \cup \Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle \leq a\}$$

ονομάζονται **κλειστοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ.
Τώρα θα θεωρήσουμε τον χώρο $\mathbb{R}^d$ με την Ευκλείδεια μετρική και θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο του A_1 είναι εσωτερικό σημείο του A_1.
Έστω οποιοδήποτε $\mathsf{x} \in A_1$, οπότε $\langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle > a$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιο $r > 0$ ώστε

$$N_{\mathsf{x}}(r) \subseteq A_1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mathsf{y} \in N_{\mathsf{x}}(r) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{y} \in A_1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 < r \quad \Rightarrow \quad \langle \mathsf{y}, \mathsf{a} \rangle > a.$$

Τώρα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{y}, \mathsf{a} \rangle > a \quad &\Leftarrow \quad \langle \mathsf{y} - \mathsf{x} + \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle > a \\ &\Leftarrow \quad \langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle + \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle > a \\ &\Leftarrow \quad -\langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle < \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a \\ &\Leftarrow \quad |\langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle| < \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a. \end{aligned}$$

Συνοψίζουμε:

$$\langle \mathsf{y}, \mathsf{a} \rangle > a \quad \Leftarrow \quad |\langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle| < \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a.$$

Τώρα θυμόμαστε την ανισότητα του Schwarz

$$|\langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle| \leq \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 \|\mathsf{a}\|_2$$

και συνεχίζουμε τις αντίστροφες συνεπαγωγές:

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{y}, \mathsf{a} \rangle > a \quad &\Leftarrow \quad |\langle \mathsf{y} - \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle| < \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a \\ &\Leftarrow \quad \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 \|\mathsf{a}\|_2 < \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a \\ &\Leftarrow \quad \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 < \frac{\langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a}{\|\mathsf{a}\|_2}. \end{aligned}$$

Τώρα θεωρούμε οποιοδήποτε r με

$$0 < r \le \frac{\langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle - a}{\|\mathsf{a}\|_2}$$

και τότε, προφανώς, ισχύει

$$\|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 < r \quad \Rightarrow \quad \langle \mathsf{y}, \mathsf{a} \rangle > a.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε σημείο του A_1 είναι εσωτερικό σημείο του A_1.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι κάθε σημείο του A_2 είναι εσωτερικό σημείο του A_2 και ότι κάθε σημείο του υπερεπιπέδου Γ είναι συνοριακό σημείο των A_1, A_2. Δηλαδή:

$$A_1{}^\circ = A_1, \quad \partial A_1 = \Gamma, \quad \overline{A_1} = A_1 \cup \Gamma,$$
$$A_2{}^\circ = A_2, \quad \partial A_2 = \Gamma, \quad \overline{A_2} = A_2 \cup \Gamma.$$

Είναι, επίσης, άμεσο ότι

$$\Gamma^\circ = \emptyset, \quad \partial\Gamma = \Gamma, \quad \overline{\Gamma} = \Gamma.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Τότε*
[α] $\partial A = \partial(A^c)$.
[β] $A^\circ = A \setminus \partial A$.
[γ] $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Απόδειξη. [α] Έχουμε ήδη πει ότι τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.

[β] Έχουμε ήδη πει ότι το A περιέχει τα εσωτερικά σημεία του και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά σημεία του. Άρα τα εσωτερικά σημεία του A προκύπτουν αν από τα σημεία του A διαγράψουμε τα συνοριακά σημεία του, τα οποία πιθανόν περιέχει.

[γ] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά σημεία του A μαζί με τα συνοριακά σημεία του A. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι ήδη μέσα στο A. Άρα για να βρούμε τα οριακά σημεία του A επισυνάπτουμε στο A τα συνοριακά σημεία του A που πιθανόν δεν περιέχονται στο A. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*
Το A χαρακτηρίζεται **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*
Το A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Έχουμε, δηλαδή, ότι

$$\text{το } A \text{ είναι ανοικτό} \quad \Leftrightarrow \quad A = A^\circ,$$
$$\text{το } A \text{ είναι κλειστό} \quad \Leftrightarrow \quad A = \overline{A}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*
[α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A \cap \partial A = \emptyset$.*
[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A \subseteq A$.*

Απόδειξη. [α] Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

[β] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. □

Στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική κάθε (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$ είναι ανοικτό σύνολο (γι αυτό τα λέμε ανοικτά διαστήματα), κάθε $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$ είναι κλειστό σύνολο (γι αυτό τα λέμε κλειστά διαστήματα) και κάθε άλλο διάστημα $[a,b)$, $(a,b]$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο. Παρατηρήστε ότι το $(-\infty,+\infty)$ είναι το μόνο διάστημα που είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο.