ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d).*
[α] *Το X και το $\emptyset$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα.*
[β] *Κάθε r-περιοχή $N_x(r)$ είναι ανοικτό σύνολο.*
[γ] *Κάθε σύνολο $\overline{N}_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$ είναι κλειστό.*
[δ] *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό.*

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ είναι $N_x(r) \subseteq X$. Άρα κάθε $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του X, οπότε το X είναι ανοικτό.
Αν το $\emptyset$ δεν ήταν ανοικτό, θα υπήρχε $x \in \emptyset$ το οποίο δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο του $\emptyset$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι δεν υπάρχει κανένα $x \in \emptyset$. Άρα το $\emptyset$ είναι ανοικτό.
Το X περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, αφού, απλούστατα, περιέχει όλα τα σημεία του. Άρα το X είναι κλειστό.
Αν κάποιο $x \in X$ ήταν οριακό σημείο του $\emptyset$, για κάθε $r > 0$ θα ίσχυε $N_x(r) \cap \emptyset \neq \emptyset$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα κανένα $x \in X$ δεν είναι οριακό σημείο του $\emptyset$. Επομένως, δεν υπάρχει κάποιο οριακό σημείο του $\emptyset$ το οποίο να μην περιέχεται στο $\emptyset$. Επομένως, το $\emptyset$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό.
[β] Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Έστω $y \in N_x(r)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι το y είναι εσωτερικό σημείο του $N_x(r)$, οπότε πρέπει να βρούμε κατάλληλο $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
Επειδή $y \in N_x(r)$, είναι $d(y, x) < r$ και θεωρούμε το

$$s = r - d(y, x) > 0.$$

Αν $z \in N_y(s)$, τότε $d(z, y) < s$, οπότε

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r$$

και, επομένως, $z \in N_x(r)$. Άρα $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
[γ] Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Για να αποδείξουμε ότι το $\overline{N}_x(r)$ είναι κλειστό σύνολο πρέπει να αποδείξουμε ότι κανένα σημείο εκτός του $\overline{N}_x(r)$ δεν είναι οριακό σημείο του $\overline{N}_x(r)$.
Θεωρούμε, λοιπόν, $y \notin \overline{N}_x(r)$ και θα δούμε ότι το y δεν είναι οριακό σημείο του $\overline{N}_x(r)$. Έχουμε ότι $d(y, x) > r$ και θεωρούμε το

$$s = d(y, x) - r > 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $z \in N_y(s) \cap \overline{N}_x(r)$, τότε έχουμε ότι $d(z, y) < s$ και $d(z, x) \leq r$, οπότε

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < s + r = d(y, x)$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει $z \in N_y(s) \cap \overline{N}_x(r)$, οπότε $N_y(s) \cap \overline{N}_x(r) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι το y δεν είναι οριακό σημείο του $\overline{N}_x(r)$.
[δ] Έστω $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Για να αποδείξουμε ότι το A είναι κλειστό πρέπει να αποδείξουμε ότι κανένα σημείο εκτός του A δεν είναι οριακό σημείο του A.
Θεωρούμε $x \in A^c$ και θα αποδείξουμε ότι το x δεν είναι οριακό σημείο του A. Αρκεί να

βρούμε κάποιο $r > 0$ ώστε $N_x(r) \cap A = \emptyset$.
Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με ότι κανένα από τα $x_1, \ldots, x_n$ δεν ανήκει στην $N_x(r)$ και αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ισχύει

$$r \leq d(x, x_1), \quad \ldots \quad, r \leq d(x, x_n)$$

και αυτό είναι ισοδύναμο με

$$r \leq \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\}.$$

Υπάρχει ένα τέτοιο $r > 0$, διότι το x είναι διαφορετικό από κάθε $x_1, \ldots, x_n$, οπότε $d(x, x_1) > 0, \ldots, d(x, x_n) > 0$ και, επομένως, $\min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\} > 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*

[α] *Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A.*

[β] *Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο A.*

Απόδειξη. [α] Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \overline{A}$.
Κατόπιν, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Θεωρούμε τυχόν x οριακό σημείο του $\overline{A}$ και θα αποδείξουμε ότι ανήκει στο $\overline{A}$, δηλαδή ότι είναι οριακό σημείο του A.
Έστω τυχόν $r > 0$. Επειδή το x είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in \overline{A}$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Και, επειδή η $N_x(r)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$. Τώρα, επειδή το y είναι οριακό σημείο του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in A$ μέσα στην περιοχή $N_y(s)$ και, επομένως, μέσα στην $N_x(r)$.
Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in A$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του A.
Αποδείξαμε ότι το τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ ανήκει στο $\overline{A}$, οπότε το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υπερσύνολο του A.
Έστω κλειστό B με $A \subseteq B$.
Έστω τυχόν $x \in \overline{A}$, δηλαδή οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$, οπότε, επειδή $A \subseteq B$, ισχύει $N_x(r) \cap B \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του B και, επειδή το B είναι κλειστό, συνεπάγεται $x \in B$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \overline{A}$ ισχύει $x \in B$, οπότε $\overline{A} \subseteq B$.

[β] Γνωρίζουμε ότι $A^\circ \subseteq A$.
Τα υπόλοιπα είναι όπως στην απόδειξη του [α]. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το A° είναι ανοικτό σύνολο και μετά αποδεικνύουμε ότι, αν πάρουμε ένα τυχόν ανοικτό σύνολο B ώστε $B \subseteq A$, τότε $B \subseteq A^\circ$. Διαβάστε τις λεπτομέρειες στο βιβλίο. □