ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Όταν μιλάμε για μια **οικογένεια συνόλων** ή **συλλογή συνόλων** Σ εννοούμε ότι κάθε $A \in \Sigma$ είναι σύνολο. Την ένωση όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε

$$\bigcup_{A\in\Sigma} A \quad \text{ή} \quad \bigcup\{A \,|\, A\in\Sigma\}.$$

Την τομή όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε

$$\bigcap_{A\in\Sigma} A \quad \text{ή} \quad \bigcap\{A \,|\, A\in\Sigma\}.$$

Πολλές φορές μια συλλογή συνόλων περιγράφεται με ένα σύνολο δεικτών Λ. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε $\lambda \in \Lambda$ αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο A_λ. Παίρνουμε έτσι τη συλλογή συνόλων

$$\Sigma = \{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, η ένωση $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ και η τομή $\bigcap_{A\in\Sigma} A$ συμβολίζονται, ισοδύναμα,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \quad \text{ή} \quad \bigcup\{A_\lambda \,|\, \lambda\in\Lambda\}$$

και

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \quad \text{ή} \quad \bigcap\{A_\lambda \,|\, \lambda\in\Lambda\},$$

αντιστοίχως.

Στην ειδική περίπτωση πεπερασμένης συλλογής, οπότε ως σύνολο δεικτών παίρνουμε το $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ για κάποιο n, η ένωση και η τομή συμβολίζονται και

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{ή} \quad A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

και

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{ή} \quad A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Στην περίπτωση που σύνολο δεικτών είναι το $\mathbb{N}$, η ένωση συμβολίζεται και

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \quad \text{ή} \quad A_1 \cup A_n \cup \cdots$$

και η τομή συμβολίζεται και

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \quad \text{ή} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d).*

[α] *Αν κάθε σύνολο της συλλογής Σ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε και η ένωση των στοιχείων της Σ, δηλαδή η $\bigcup_{A\in\Sigma} A$, είναι ανοικτό σύνολο.*

[β] *Αν κάθε σύνολο $A_1, \ldots, A_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε και η ένωση*

$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ *είναι κλειστό σύνολο.*

[γ] *Αν κάθε σύνολο της συλλογής* Σ *είναι κλειστό υποσύνολο του* X*, τότε και η τομή των στοιχείων της* Σ*, δηλαδή η* $\bigcap_{A\in\Sigma} A$*, είναι κλειστό σύνολο.*

[δ] *Αν κάθε σύνολο* $A_1, \ldots, A_n$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* X*, τότε και η τομή* $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ *είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x \in \bigcup_{A\in\Sigma} A$.
Τότε υπάρχει $A \in \Sigma$ ώστε $x \in A$. Το A είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$ και, επομένως, $N_x(r) \subseteq \bigcup_{A\in\Sigma} A$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του $\bigcup_{A\in\Sigma} A$.
Αποδείξαμε ότι κάθε σημείο του $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ είναι εσωτερικό σημείο του $\bigcup_{A\in\Sigma} A$, οπότε το $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ είναι ανοικτό σύνολο.
[β] Έστω $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και $x \notin A$. Θα αποδείξουμε ότι το x δεν είναι οριακό σημείο του A.
Το x δεν ανήκει σε κανένα από τα $A_1, \ldots, A_n$. Αφού κάθε A_k είναι κλειστό, το x δεν είναι οριακό σημείο κανενός A_k, οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $r_k > 0$ ώστε

$$N_x(r_1) \cap A_1 = \emptyset, \quad \ldots \quad , N_x(r_n) \cap A_n = \emptyset.$$

Τώρα θεωρούμε το

$$r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$$

και τότε έχουμε

$$N_x(r) \cap A_1 = \emptyset, \quad \ldots \quad , N_x(r) \cap A_n = \emptyset.$$

Αυτό ισχύει διότι $N_x(r) \subseteq N_x(r_k)$ για κάθε k.
Συνεπάγεται

$$N_x(r) \cap A = \emptyset.$$

Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του A.
Αποδείξαμε ότι κάθε σημείο εκτός του A δεν είναι οριακό σημείο του A, οπότε το A είναι κλειστό σύνολο.
Για τα [γ], [δ] δείτε το βιβλίο. □

Τα αποτελέσματα του Θεωρήματος αναφέρονται επιγραμματικά ως εξής:

Ένωση ανοικτών είναι ανοικτό.

Ένωση πεπερασμένων κλειστών είναι κλειστό.

Τομή κλειστών είναι κλειστό.

Τομή πεπερασμένων ανοικτών είναι ανοικτό.

Θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε: *είναι η ένωση κλειστών κλειστό*, χωρίς περιορισμό για το πλήθος των συνόλων; Η απάντηση είναι: *άλλοτε ναι, άλλοτε όχι.*

Παράδειγμα. Τα παρακάτω σύνολα είναι στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Το $A_n = [-1, 1]$ είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = [-1, 1]$ είναι κλειστό.
Το $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (0, 1]$ δεν είναι κλειστό.

Θα μπορούσαμε, επίσης, να ρωτήσουμε: *είναι η τομή ανοικτών ανοικτό*, χωρίς περιορισμό για το πλήθος των συνόλων; Η απάντηση και πάλι είναι: *άλλοτε ναι, άλλοτε όχι.*

Παράδειγμα. Τα παρακάτω σύνολα είναι στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Το $A_n = (-1, 1)$ είναι ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$ είναι ανοικτό.
Το $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ είναι ανοικτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Το 0 είναι οριακό σημείο του A, διότι για κάθε $r > 0$ η περιοχή $(-r, r)$ του 0 περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A. Πράγματι, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $-r < 0 < \frac{1}{n} < r$.
Άρα το 0 είναι οριακό σημείο του A αλλά δεν ανήκει στο A. Άρα το A δεν είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = A \cup \{0\} = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Θα αποδείξουμε ότι το B είναι κλειστό σύνολο, αποδεικνύοντας ότι, αν ένα x δεν ανήκει στο B, τότε το x δεν είναι οριακό σημείο του B.
Έστω, λοιπόν, $x \notin B$.
Τότε είτε $x > 1$ είτε $x < 0$ είτε $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
Αν $x > 1$, θεωρούμε $r = x - 1 > 0$ και τότε η περιοχή $(x - r, x + r) = (1, 2x - 1)$ του x δεν τέμνει το B. Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του B.
Αν $x < 0$, θεωρούμε $r = -x > 0$ και τότε η περιοχή $(x - r, x + r) = (2x, 0)$ του x δεν τέμνει το B. Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του B.
Αν $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε

$$r = \min\left\{ x - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - x \right\} > 0,$$

δηλαδή την μικρότερη από τις αποστάσεις του x από τα $\frac{1}{n+1}$ και $\frac{1}{n}$. Τότε η περιοχή $(x - r, x + r)$ του x περιέχεται στο διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, οπότε δεν τέμνει το B και άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του B.
Άρα σε κάθε περίπτωση, αν το x δεν ανήκει στο B, τότε το x δεν είναι οριακό σημείο του B. Δηλαδή το B περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό σύνολο.