ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα με $a < b$.

Διαμέριση Δ του $[a, b]$ είναι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ το οποίο περιέχει τουλάχιστον τα a, b. Δηλαδή, γενικά

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

όπου

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Υπάρχει μόνο μία διαμέριση δύο σημείων: η $\Delta = \{x_0, x_1\}$, με $x_0 = a$, $x_1 = b$. Οι διαμερίσεις τριών σημείων είναι της μορφής $\Delta = \{x_0, x_1, x_2\}$, με $x_0 = a$, $x_2 = b$ και όπου x_1 είναι οποιοδήποτε σημείο ανάμεσα στα a, b. Δηλαδή υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τριών σημείων. Και, γενικότερα, είναι προφανές ότι, αν $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις $n + 1$ σημείων.

Κάθε διαμέριση $n + 1$ σημείων $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n διαδοχικά υποδιαστήματα. Το k-οστό υποδιάστημα είναι το $[x_{k-1}, x_k]$.

Τώρα, υπάρχει η ειδική κατηγορία διαμερίσεων που παίρνουμε όταν χωρίζουμε το $[a, b]$ σε ισομήκη διαδοχικά υποδιαστήματα.

Για παράδειγμα, υπάρχει μόνο μία διαμέριση τεσσάρων σημείων του $[0, 1]$ σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα: η $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Όμως, όπως είπαμε ήδη, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τεσσάρων σημείων του $[0, 1]$. Μια τέτοια είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, 1\}$.

Πώς κατασκευάζουμε την διαμέριση $n+1$ σημείων Δ σε n *ισομήκη* υποδιαστήματα του $[a, b]$; Επειδή το πλήθος των υποδιαστημάτων είναι n και το συνολικό τους μήκος $b - a$, το μήκος καθενός από αυτά είναι $\frac{b-a}{n}$. Επομένως, τα διαιρετικά σημεία είναι τα

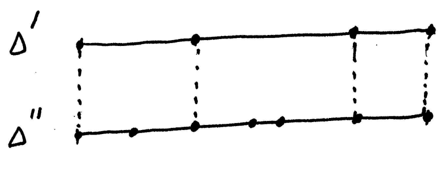
$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \quad x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b.$$

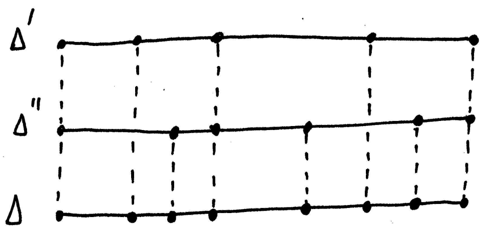
Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Λέμε ότι η Δ'' είναι **λεπτότερη** από την Δ' αν $\Delta' \subseteq \Delta''$. Με άλλα λόγια, η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ' αν κάθε διαιρετικό σημείο της Δ' είναι και διαιρετικό σημείο της Δ'' ή, με άλλα λόγια, αν η Δ'' περιέχει τα διαιρετικά σημεία της Δ' και πιθανόν επιπλέον διαιρετικά σημεία.

Για παράδειγμα η διαμέριση $\Delta'' = \{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\}$ του $[0, 1]$ είναι λεπτότερη από τη διαμέριση $\Delta' = \{0, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, 1\}$ του $[0, 1]$.

Ενώ από τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$, $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$ καμιά δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.



Δ'' λεπτότερη από την Δ'



$\Delta = \Delta' \cup \Delta''$

Τώρα, έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε η $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ και ονομάζεται **κοινή εκλέπτυνση** των Δ', Δ''. Προφανώς, ισχύει $\Delta' \subseteq \Delta$ και $\Delta'' \subseteq \Delta$, οπότε η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''.

Στο παράδειγμα με τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, 1\}$ και $\Delta'' = \{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\}$ του $[0, 1]$, όπου η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ''. Ενώ στο παράδειγμα με τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$ και $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$, όπου καμιά από αυτές δεν είναι λεπτότερη από την άλλη, η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$.

Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$ και οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Δηλαδή

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Για κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ορίζουμε τους αριθμούς

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

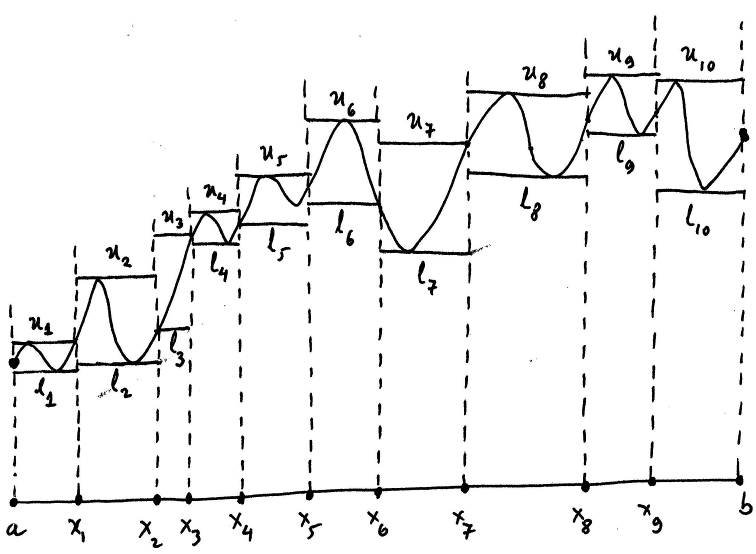
Το σύνολο $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ είναι φραγμένο διότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και, επομένως, και στο $[x_{k-1}, x_k]$. Άρα οι l_k, u_k είναι αριθμοί.

Κατόπιν, ορίζουμε το **κάτω άθροισμα Darboux** της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ να είναι ο αριθμός

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) = l_1(x_1 - x_0) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1})$$

και το **άνω άθροισμα Darboux** της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ να είναι ο αριθμός

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) = u_1(x_1 - x_0) + \cdots + u_n(x_n - x_{n-1}).$$



Επειδή προφανώς ισχύει $l_k \leq u_k$ για κάθε k, πολλαπλασιάζοντας με τον θετικό αριθμό $x_k - x_{k-1}$ και προσθέτοντας τις ανισότητες για $k = 1, \dots, n$, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}),$$

δηλαδή ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Επίσης, αφαιρώντας κατά μέλη τα δυο αθροίσματα, έχουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο των ποσοτήτων l_k, u_k και των αθροισμάτων Darboux φαίνεται πιο άμεσα αν υποθέσουμε ότι η f είναι μη-αρνητική (όπως στο προηγούμενο σχήμα). Αν ισχύει

$$f(x) \ge 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b],$$

τότε, φυσικά, ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε x σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως, ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ και άρα ο 0 είναι μικρότερος ή ίσος του μέγιστου κάτω φράγματος αυτού του συνόλου. Δηλαδή,

$$0 \le l_k \qquad \text{για κάθε } k.$$

Το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο πάνω (με την ευρεία έννοια) από τον x-άξονα. Ειδικώτερα, το ίδιο ισχύει και για το γράφημα της f σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$. Τώρα, το l_k είναι το ύψος του *μέγιστου* κατακόρυφου ορθογωνίου το οποίο έχει βάση το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και το οποίο είναι κάτω από το γράφημα της f στο ίδιο υποδιάστημα και η ποσότητα $l_k(x_k - x_{k-1})$ είναι το εμβαδό αυτού του ορθογωνίου. Ομοίως, το u_k είναι το ύψος του *ελάχιστου* κατακόρυφου ορθογωνίου το οποίο έχει βάση το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και το οποίο έχει από κάτω του το γράφημα της f στο ίδιο υποδιάστημα και η ποσότητα $u_k(x_k - x_{k-1})$ είναι το εμβαδό αυτού του ορθογωνίου. Το κατακόρυφο ορθογώνιο το οποίο βρίσκεται πάνω από το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες στα ύψη l_k, u_k είναι το *ελάχιστο* τέτοιο ορθογώνιο το οποίο περιέχει το γράφημα της f στο ίδιο υποδιάστημα και το εμβαδό αυτού του ορθογωνίου είναι ίσο με $(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1})$. Είναι, επίσης, φανερό ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \text{συνολικό εμβαδό των “κάτω” ορθογωνίων}$$

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \text{συνολικό εμβαδό των “άνω” ορθογωνίων}$$

και

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \text{συνολικό εμβαδό των “ενδιάμεσων” ορθογωνίων.}$$