ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα I. Λέμε ότι η F είναι **αντιπαράγωγος** της f στο I αν ισχύει

$$F' = f \qquad \text{στο } I.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η F είναι αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Αν c είναι σταθερή συνάρτηση στο I, τότε

$$(F + c)' = F' + c' = f + 0 = f \qquad \text{στο } I.$$

Άρα η $F + c$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I.
Αντιστρόφως, έστω G οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I. Τότε:

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0 \qquad \text{στο } I.$$

Επειδή το I είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερή συνάρτηση c στο I ώστε να είναι $G - F = c$ και άρα $G = F + c$ στο I. □

Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρες* αντιπαραγώγους στο διάστημα I και αυτές είναι ακριβώς οι εξής: μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Πρέπει να προσέξουμε το εξής. Αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο σταθερή 0 στην ένωση *δυο μη-διαδοχικών* διαστημάτων, τότε δεν συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων. Έτσι, λοιπόν, καταλαβαίνουμε γιατί στην πρόταση αναφέρεται "διάστημα" και όχι "ένωση διαστημάτων".

Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις f της επόμενης άσκησης είναι ασυνεχείς στο 0, ενώ η μία δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$ και η άλλη έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7.1.3. [α] *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.

[β] *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Λύση: [α] Έστω F μια αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, έστω $F' = f$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει

$$F(x) = c_1 \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, 0].$$

Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει

$$F(x) = x + c_2 \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Άρα

$$c_1 = F(0) = c_2$$

και, συμβολίζοντας

$$c = c_1 = c_2,$$

συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$F(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \leq 0 \\ x + c, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Τώρα, όμως

$$F_-{}'(0) = 0, \qquad F_+{}'(0) = 1,$$

οπότε η F δεν έχει παράγωγο στο 0. Αυτό είναι άτοπο, διότι πρέπει να ισχύει $F'(0) = f(0) = 0$.

[β] Αναλογιζόμενοι ποιά συνάρτηση μπορεί να είναι αντιπαράγωγος της f, μας έρχεται στο μυαλό ότι ισχύει

$$\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η τιμή $F(0) = 0$ προκύπτει επειδή θέλουμε η F να είναι παραγωγίσιμη και, επομένως, συνεχής στο 0, οπότε αναγκαστικά:

$$F(0) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Τώρα, έχουμε ήδη ελέγξει ότι ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq 0$, ενώ για $x = 0$ έχουμε

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Άρα η F είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7.1.2. *Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και ώστε $F(0) = 1$.*

Λύση: Αλλάζουμε μεταβλητή:

$$t = \log x \qquad x = e^t.$$

Όταν το x διατρέχει το διάστημα $(0,1]$, το t διατρέχει το διάστημα $(-\infty,0]$ και, όταν το x διατρέχει το διάστημα $[1,+\infty)$, το t διατρέχει το διάστημα $[0,+\infty)$.
Άρα οι δοσμένες συνθήκες, εκτός της $F(0)=1$, γράφονται, ισοδύναμα,

$$F'(t)=1 \quad \text{για κάθε } t\in(-\infty,0] \qquad \text{και} \qquad F'(t)=e^t \quad \text{για κάθε } t\in[0,+\infty).$$

Επειδή ισχύει $F'(t)=1$ για κάθε $t\in(-\infty,0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει

$$F(t)=t+c_1 \qquad \text{για κάθε } t\in(-\infty,0].$$

Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(t)=e^t$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει

$$F(t)=e^t+c_2 \qquad \text{για κάθε } t\in[0,+\infty).$$

Άρα

$$c_1=1+c_2=F(0)=1$$

και, επομένως, ισχύει

$$F(t)=\begin{cases} t+1, & \text{αν } t\leq 0\\ e^t, & \text{αν } t\geq 0\end{cases}$$

Ελέγχουμε εύκολα ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ότι $F'(0)=1$.

Παρατήρηση: Λύστε την άσκηση θεωρώντας την συνάρτηση $G(x)=F(\log x)$.

Έστω $a<b$ και f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$. Επεκτείνουμε το σύμβολο του ολοκληρώματος:

$$\int_b^a f=-\int_a^b f.$$

Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στο a, τότε την θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,a]=\{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f=0.$$

Άρα επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Δηλαδή, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f$ για κάθε a,b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, ολοκληρώσιμη στο $[b,a]$, αν $b<a$, και, απλώς, ορισμένη στο a, αν $a=b$.

Τώρα θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I και παίρνουμε ένα $a\in I$, το οποίο θεωρούμε σταθερό. Κατόπιν θεωρούμε μεταβλητό $x\in I$ και ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f+c \qquad \text{για κάθε } x\in I,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο διάστημα I.

Προϋπόθεση για να ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα F είναι ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Πράγματι, για να ορισθεί το $F(x)=\int_a^x f+c$ πρέπει η f να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[x,a]$ ή $[a,x]$ για κάθε $x\in I$, $x\neq a$. Για παράδειγμα, αν η f είναι τμηματικά συνεχής ή τμηματικά μονότονη στο I, τότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά της στο I.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η F είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $F+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω

$$F(x)=\int_{a_0}^{x} f+c_0 \qquad \text{για κάθε } x\in I,$$

όπου c_0 είναι μια σταθερή συνάρτηση στο I.
Αν c είναι μια άλλη σταθερή συνάρτηση στο I, τότε για την $G=F+c$ έχουμε

$$G(x)=F(x)+c=\int_{a_0}^{x} f+c_0+c=\int_{a_0}^{x} f+c_1 \qquad \text{για κάθε } x\in I,$$

όπου $c_1=c_0+c$ είναι μια σταθερή συνάρτηση στο I.
Άρα η G είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I.
Αντιστρόφως, έστω G ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Τότε για κάποιο $a_1\in I$ και κάποια σταθερή συνάρτηση c_1 στο I ισχύει

$$G(x)=\int_{a_1}^{x} f+c_1 \qquad \text{για κάθε } x\in I.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_{a_1}^{x} f+c_1=\int_{a_0}^{x} f+\int_{a_1}^{a_0} f+c_0+(c_1-c_0)=F(x)+\int_{a_1}^{a_0} f+(c_1-c_0)\\&=F(x)+c \qquad \text{για κάθε } x\in I,\end{aligned}$$

όπου $c=\int_{a_1}^{a_0} f+(c_1-c_0)$ είναι μια σταθερή συνάρτηση στο I. □

Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρα* αόριστα ολοκληρώματα στο διάστημα I και αυτά είναι ακριβώς οι εξής συναρτήσεις: ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $a\in I$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $\int_a^x f+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $a\in I$, σταθερή συνάρτηση c στο I και το αόριστο ολοκλήρωμα με τύπο

$$F(x)=\int_{a}^{x} f+c \qquad \text{για κάθε } x\in I.$$

Έστω εσωτερικό σημείο x_0 του I. Θεωρούμε ένα διάστημα $[k,l]\subseteq I$ ώστε $k<x_0<l$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[k,l]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[k,l]$. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)|\leq M \qquad \text{για κάθε } x\in[k,l].$$

Τότε, για κάθε $x\in[k,l]$ ισχύει

$$|F(x)-F(x_0)|=\Big|\Big(\int_a^x f+c\Big)-\Big(\int_a^{x_0} f+c\Big)\Big|=\Big|\int_{x_0}^{x} f\Big|\leq M|x-x_0|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι το $[x_0, x]$ ή $[x, x_0]$ είναι υποδιάστημα του $[k, l]$, οπότε ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x_0, x]$ ή $[x, x_0]$.
Άρα ισχύει

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| \qquad \text{για κάθε } x \in [k, l],$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

και η F είναι συνεχής στο x_0.
Η απόδειξη είναι παρόμοια αν το x_0 είναι άκρο του I. □

Άσκηση 7.1.6. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^\xi f = \int_\xi^b f$.*

Λύση: Γράφουμε αυτό που έχουμε να αποδείξουμε στη μορφή

$$\int_a^\xi f + \int_b^\xi f = 0$$

και ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f + \int_b^x f \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως άθροισμα δυο αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο $[a, b]$.
Τώρα,

$$F(a) = -\int_a^b f, \qquad F(b) = \int_a^b f,$$

οπότε

$$F(a)F(b) = -\Big(\int_a^b f\Big)^2 \leq 0.$$

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $F(\xi) = 0$.