ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ακολουθούν δυο γενικά αλλά πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα. Έστω f αύξουσα στο $[a,b]$ και διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$. Τότε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ η f έχει ελάχιστη τιμή $f(x_{k-1})$ και μέγιστη τιμή $f(x_k)$. Άρα

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = f(x_{k-1}), \quad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = f(x_k)$$

και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Αν η f είναι φθίνουσα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι $l_k = f(x_k)$ και $u_k = f(x_{k-1})$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Παράδειγμα. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ζ_k και η_k ώστε να ισχύει $f(\zeta_k) \le f(x) \le f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $l_k = f(\zeta_k)$ και $u_k = f(\eta_k)$, οπότε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Έστω f φραγμένη στο $[c,d]$ και $[c',d'] \subseteq [c,d]$. Επίσης, έστω

$$l = \inf\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}, \qquad l' = \inf\{f(x) \,|\, c' \le x \le d'\},$$

$$u = \sup\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}, \qquad u' = \sup\{f(x) \,|\, c' \le x \le d'\}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$l \le u, \qquad l' \le u'.$$

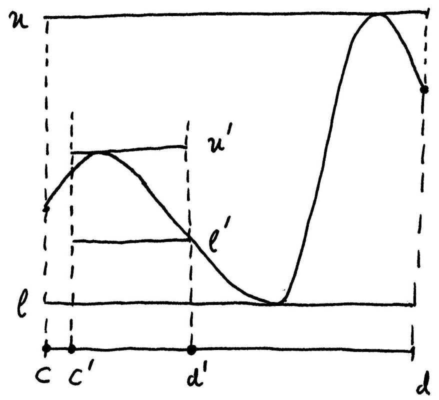
Όμως, είναι σαφές ότι

$$\{f(x) \,|\, c' \le x \le d'\} \subseteq \{f(x) \,|\, c \le x \le d\}.$$

Και τώρα θα χρησιμοποιήσουμε μια γενικότερη ιδέα. Έστω δυο σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Τότε για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \in B$ και άρα $a \le \sup B$. Άρα το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε είναι μεγαλύτερο (με την ευρεία έννοια) από το μικρότερο άνω φράγμα του A. Δηλαδή $\sup A \le \sup B$. Ομοίως, για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \in B$ και άρα $a \ge \inf B$. Άρα το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A, οπότε είναι μικρότερο (με την ευρεία έννοια) από το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A. Δηλαδή $\inf B \le \inf A$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, αν ένα σύνολο μικραίνει, τότε το supremum του μικραίνει (με την ευρεία έννοια) και το infimum του μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια). Εφαρμόζοντας αυτήν την γενική ιδιότητα στα παραπάνω σύνολα τιμών της f στα διαστήματα $[c', d']$ και $[c, d]$, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$l \leq l' \leq u' \leq u.$$

Με άλλα λόγια: *όταν το διάστημα μικραίνει, τότε το infimum της συνάρτησης μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια) και το supremum της μικραίνει (με την ευρεία έννοια).*



ΛΗΜΜΑ. *Έστω f φραγμένη στο $[a, b]$, $l = \text{inf}\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, $u = \text{sup}\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$. Τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ ισχύει*

$$l(b-a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b-a).$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{x_0, x_1 \ldots , x_{n-1}, x_n\}$. Για κάθε $k = 1, \ldots , n$ είναι $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$, οπότε από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε

$$l \leq l_k \leq u_k \leq u$$

και, επομένως,

$$l(x_k - x_{k-1}) \leq l_k(x_k - x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \leq u(x_k - x_{k-1}).$$

Με άθροιση συνεπάγεται

$$\sum_{k=1}^{n} l(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u(x_k - x_{k-1}).$$

Το αριστερό άθροισμα είναι ίσο με

$$l \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = l(b-a)$$

και το δεξιό άθροισμα είναι ίσο με

$$u \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = u(b-a).$$

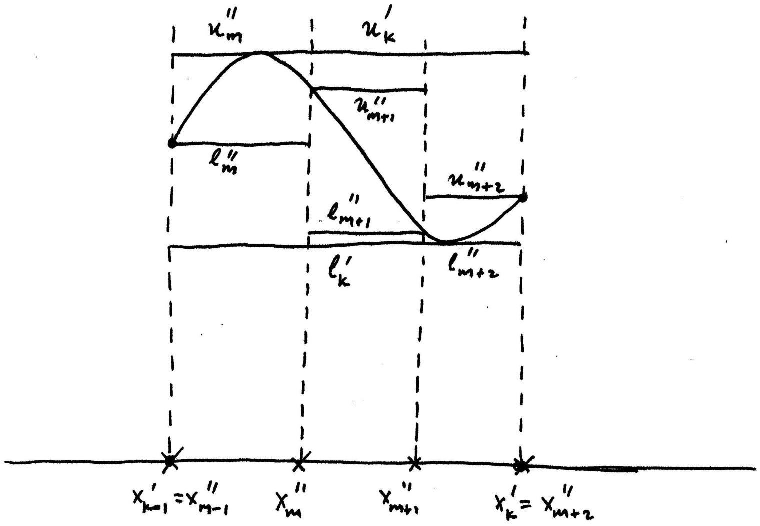
Τα δυο μεσαία αθροίσματα είναι τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. $\square$

Το επόμενο Λήμμα είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη της θεωρίας. Λέει ότι, *όταν εκλεπτύνεται η διαμέριση, το άνω άθροισμα Darboux μικραίνει (με την ευρεία έννοια) και το κάτω άθροισμα Darboux μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια).*

ΛΗΜΜΑ. *Έστω f φραγμένη στο $[a,b]$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τότε*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta').$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta' = \{x'_0, x'_1 \ldots, x'_{n-1}, x'_n\}$ και $\Delta'' = \{x''_0, x''_1 \ldots, x''_{r-1}, x''_r\}$ οι δυο διαμερίσεις του $[a,b]$. Επειδή η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τα διαιρετικά σημεία της Δ' είναι διαιρετικά σημεία και της Δ'' αλλά η Δ'' μπορεί να έχει επιπλέον διαιρετικά σημεία. Στο βοηθητικό σχήμα φαίνονται τα διαδοχικά σημεία x'_{k-1}, x'_k της Δ' και τα διαδοχικά σημεία x''_{m-1}, x''_m, x''_{m+1}, x''_{m+2} της Δ''. Βλέπουμε ότι τα (μη-διαδοχικά) σημεία x''_{m-1}, x''_{m+2} της Δ'' είναι τα ίδια με τα (διαδοχικά) σημεία x'_{k-1}, x'_k της Δ' και ότι ανάμεσα σε αυτά παρεμβάλλονται τα σημεία x''_m, x''_{m+1} της Δ''. Έτσι το υποδιάστημα $[x'_{k-1}, x'_k]$ της Δ' χωρίζεται ακριβώς στα υποδιαστήματα $[x''_{m-1}, x''_m]$, $[x''_m, x''_{m+1}]$, $[x''_{m+1}, x''_{m+2}]$ της Δ''. Φυσικά, το ίδιο συμβαίνει σε κάθε υποδιάστημα της Δ': χωρίζεται ακριβώς σε υποδιαστήματα της Δ''.



Και τώρα, σύμφωνα με όσα έχουμε αναπτύξει προηγουμένως (και όπως φαίνεται και στο σχήμα), έχουμε ότι καθεμιά από τις ποσότητες u''_m, u''_{m+1}, u''_{m+2} είναι μικρότερη ή ίση της ποσοτητας u'_k και ότι καθεμιά από τις ποσότητες l''_m, l''_{m+1}, l''_{m+2} είναι μεγαλύτερη ή ίση της ποσοτητας l'_k. Επομένως,

$$\begin{aligned} l''_m(x''_m - x''_{m-1}) + l''_{m+1}(x''_{m+1} - x''_m) + l''_{m+2}(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \\ \geq l'_k(x''_m - x''_{m-1}) + l'_k(x''_{m+1} - x''_m) + l'_k(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \\ = l'_k(x'_k - x'_{k-1}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} u''_m(x''_m - x''_{m-1}) + u''_{m+1}(x''_{m+1} - x''_m) + u''_{m+2}(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \\ \leq u'_k(x''_m - x''_{m-1}) + u'_k(x''_{m+1} - x''_m) + u'_k(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \\ = u'_k(x'_k - x'_{k-1}). \end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε το μέχρι στιγμής αποτέλεσμα:

$$l''_m(x''_m - x''_{m-1}) + l''_{m+1}(x''_{m+1} - x''_m) + l''_{m+2}(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \geq l'_k(x'_k - x'_{k-1}), \quad (1)$$

$$u''_m(x''_m - x''_{m-1}) + u''_{m+1}(x''_{m+1} - x''_m) + u''_{m+2}(x''_{m+2} - x''_{m+1}) \leq u'_k(x'_k - x'_{k-1}). \quad (2)$$

Τώρα πρέπει να είναι φανερό ότι, αν αθροίσουμε τις ανισότητες (1) για κάθε υποδιάστημα $[x'_{k-1}, x'_k]$, θα προκύψει ίδια ανισότητα η οποία στην αριστερή μεριά θα έχει όλους τους όρους του κάτω αθροίσματος Darboux για την Δ'' και στην δεξιά μεριά θα έχει όλους τους όρους του κάτω αθροίσματος Darboux για την Δ'. Το ίδιο, αλλά σε σχέση με τα άνω αθροίσματα Darboux, θα γίνει αν αθροίσουμε τις ανισότητες (2). Επομένως, θα βρούμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \geq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'),$$

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$$

και η απόδειξη τελείωσε, διότι γνωρίζουμε ότι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. □

Και το επόμενο Λήμμα είναι πολύ βασικό. Λέει ότι *κάθε κάτω άθροισμα Darboux είναι μικρότερο ή ίσο κάθε άνω αθροίσματος Darboux, ακόμη κι αν τα δυο αυτά αθροίσματα Darboux δεν προέρχονται από την ίδια διαμέριση.*

ΛΗΜΜΑ. *Έστω f φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε ισχύει*

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$$

για κάθε δυο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ η οποία είναι λεπτότερη και από τις δυο διαμερίσεις Δ', Δ''.
Τότε από το προηγούμενο Λήμμα συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Επειδή

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta),$$

συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. □