ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$\int^x f \qquad \text{και} \qquad \int f(x)\,dx$$

για να συμβολίσουμε *όλα μαζί τα αόριστα ολοκληρώματα* της f σε ένα διάστημα I. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int^x f = \int_a^x f + c \qquad \text{ή} \qquad \int f(x)\,dx = \int_a^x f + c \qquad \text{για } x \in I$$

και διαβάζουμε: το $\int^x f$ ή $\int f(x)\,dx$ είναι κάθε συνάρτηση $\int_a^x f + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Πάντοτε γράφουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x: είτε στο σύμβολο $\int^x f$ είτε στο σύμβολο $\int f(x)\,dx$.

Παράδειγμα. Γράφουμε

$$\int x\,dx = \int_a^x t\,dt + c = \frac{x^2 - a^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} + \Big(c - \frac{a^2}{2}\Big) = \frac{x^2}{2} + c,$$

όπου αντικαθιστούμε την αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση $c - \frac{a^2}{2}$ με την αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση c. Αυτή η αντικατάσταση δικαιολογείται ως εξής: όταν η σταθερά c διατρέχει όλους τους αριθμούς, τότε και η σταθερά $c - \frac{a^2}{2}$ διατρέχει όλους τους αριθμούς.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού. Παρέχει την καθόλου προφανή σύνδεση ανάμεσα σε δυο φαινομενικά ασύνδετες έννοιες: την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Οι συνέπειες για τον χειρισμό αλλά και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι σημαντικές.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. *Έστω f ορισμένη στο διάστημα I και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν F είναι οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τότε ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in I$ και σταθερή συνάρτηση c στο I και το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f + c \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in I$. Θα αποδείξουμε ότι

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Τώρα, για $x \in I$, $x \neq x_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0) &= \frac{(\int_a^x f+c)-(\int_a^{x_0} f+c)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\int_{x_0}^x f}{x-x_0}-f(x_0)\\ &= \frac{\int_{x_0}^x f - f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^x f-\int_{x_0}^x f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{\int_{x_0}^x (f-f(x_0))}{x-x_0}.\end{aligned} \tag{1}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in I,\ |x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Έστω, λοιπόν, οποιοδήποτε $x \in I$ με $0 < |x-x_0| < \delta$. Τότε για κάθε $t \in [x_0, x]$ ή $t \in [x, x_0]$ ισχύει $|t-x_0| < \delta$, οπότε από την (2) συνεπάγεται $|f(t)-f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα

$$\Big|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))\Big| = \Big|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\Big| \leq \frac{\epsilon}{2}|x-x_0| < \epsilon|x-x_0|.$$

Τότε, από την (1) συνεπάγεται

$$\Big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\Big| = \frac{|\int_{x_0}^x (f-f(x_0))|}{|x-x_0|} < \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in I$ με $0 < |x-x_0| < \delta$ να ισχύει $\big|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\big| < \epsilon$.
Άρα $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, οπότε $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Έχουμε, λοιπόν, τον βασικό τύπο

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f + c\Big) = f(x) \qquad \text{αν } f \text{ συνεχής στο } x.$$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι απλά πορίσματα του Θεμελιώδους Θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I, τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της f στο I.*

Απόδειξη. Έστω F οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Τότε η F είναι και αντιπαράγωγος της f στο I.
Τώρα, αφ' ενός τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I, αφ' ετέρου οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι (πάλι) οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. □

Παράδειγμα. Στο προηγούμενο μάθημα λύσαμε την άσκηση 7.1.3 και είδαμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.
Όμως, η f *έχει* αόριστο ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $x < 0$, έχουμε

$$\int_0^x f = -\int_x^0 f = \int_x^0 0\,dt = 0$$

και, αν $x > 0$, έχουμε

$$\int_0^x f = \int_0^x 1\,dt = x.$$

Και, επειδή για $x = 0$ έχουμε $\int_0^0 f = 0$, ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση

$$\int_0^x f = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Η επόμενη πρόταση έχει σπουδαία πρακτική αξία.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και F οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I. Τότε*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I,$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. Το $\int f(x)dx$, δηλαδή το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I, ταυτίζεται με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I, δηλαδή με το σύνολο των συναρτήσεων $F(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ταυτότητα.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποια σταθερά c ώστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x f$ να ισούται με την $F + c$ στο I. Δηλαδή, ισχύει

$$\int_a^x f = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Με $x = a$ βρίσκουμε

$$0 = F(a) + c,$$

οπότε $c = -F(a)$.
Τέλος, με $x = b$ έχουμε

$$\int_a^b f = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Παράδειγμα. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b x\,dx$ έχουμε δύο τρόπους. Έχουμε ήδη βρει ότι $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ με τη μέθοδο των αθροισμάτων Riemann. Από την άλλη μεριά, η συνάρτηση $\frac{x^2}{2}$ είναι αντιπαράγωγος της x στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω F παραγωγίσιμη στο διάστημα I ώστε η F' να είναι συνεχής στο I. Τότε,*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη Πρόταση στην $f = F'$, παρατηρώντας ότι η F είναι, προφανώς, αντιπαράγωγος της f στο I. □

Άσκηση 7.2.10. *Έστω f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και*

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f \qquad \text{για κάθε } x \geq 0. \tag{3}$$

(i) *Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.*

(ii) *Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.*

(iii) *Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.*

Λύση: (i) Κατ' αρχάς, από την (3) συνεπάγεται

$$f(0) = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.
Αν ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, τότε ισχύει $\int_0^x f \leq 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε βάσει της (3) έχουμε $f(x)^2 \leq 0$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, $f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(ii) Επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, από την (3) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) = \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f} \qquad \text{για κάθε } x \geq 0. \tag{4}$$

Τώρα, έστω $x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και ισχύει $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, x]$. Άρα είναι $\int_0^x f \geq 0$ και μάλιστα, επειδή η f δεν είναι σταθερή 0 στο $[0, x]$, ισχύει $\int_0^x f > 0$.
Το ίδιο αποδεικνύεται πιο απλά ως εξής. Αν $x > 0$, τότε $f(x) > 0$, οπότε από την (3) συνεπάγεται $\int_0^x f > 0$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι ισχύει

$$\int_0^x f > 0 \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Τώρα, η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε ισχύει

$$\Big(\int_0^x f\Big)' = f(x) \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Επίσης, η συνάρτηση $\sqrt{y}$ είναι παραγωγίσιμη για $y > 0$. Άρα από τον Κανόνα Αλυσίδας και από την (4) συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ και ότι

$$f'(x) = \sqrt{2}\,\frac{f(x)}{2\sqrt{\int_0^x f}} = \frac{f(x)}{\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f}} = 1 \qquad \text{για κάθε } x > 0,$$

όπου στην τελευταία ισότητα εφαρμόζουμε πάλι την (4).

(iii) Από την τελευταία σχέση και από το ότι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$f(x) = x + c \qquad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Για $x = 0$ παίρνουμε $0 = 0 + c$, οπότε $c = 0$ και άρα ισχύει

$$f(x) = x \qquad \text{για κάθε } x \geq 0.$$