ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Την τελευταία αφορά αποδείξαμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$$

για κάθε δυο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου

$$\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

είναι μικρότερο ή ίσο κάθε στοιχείου του συνόλου

$$\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

Τώρα θυμόμαστε μια γενικότερη ιδιότητα. Έστω ότι έχουμε δυο σύνολα A, B και ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$. Τότε κάθε $a \in A$ είναι κάτω φράγμα του B, οπότε είναι μικρότερο ή ίσο του μεγαλύτερου κάτω φράγματος του B. Άρα για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \leq \inf B$. Τώρα αυτό σημαίνει ότι το $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μικρότερου άνω φράγματος του A. Άρα $\sup A \leq \inf B$. Και τώρα θα εφαρμόσουμε αυτήν την γενική ιδιότητα στα δυο παραπάνω σύνολα με τα κάτω και άνω αθροίσματα Darboux και θα βρούμε ότι

$$\sup\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμ. του } [a,b]\} \leq \inf\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμ. του } [a,b]\}. \quad (1)$$

Τώρα συμβολίζουμε

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμ. του } [a,b]\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta \text{ διαμ. του } [a,b]\}$$

και τα $\underline{\int_a^b} f$, $\overline{\int_a^b} f$ τα ονομάζουμε **κάτω ολοκλήρωμα** και **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$.

Άρα η ανισότητα (1) γράφεται

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Ο τελευταίος ορισμός. Αν η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, λέμε ότι είναι **(Riemann) ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ ή ότι **έχει (Riemann) ολοκλήρωμα** στο $[a,b]$ αν

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε την κοινή τιμή των $\underline{\int_a^b} f$ και $\overline{\int_a^b} f$ ονομάζουμε **(Riemann) ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και τη συμβολίζουμε $\int_a^b f$. Δηλαδή, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, ορίζουμε

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Είναι πολύ συνηθισμένο να συμβολίζουμε τα $\underline{\int_a^b} f$, $\int_a^b f$ και $\overline{\int_a^b} f$ με τρόπο ώστε να φαίνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης f. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα. Έστω σταθερή συνάρτηση με τύπο $f(x) = c$ στο διάστημα $[a, b]$. Έστω τυχαία διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ η συνάρτηση έχει μόνο μια τιμή, c, οπότε

$$\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = \{c\}$$

και άρα

$$l_k = \inf\{c\} = c, \qquad u_k = \sup\{c\} = c.$$

Επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a), \ \ \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι όποια κι αν είναι η διαμέριση Δ οι ποσότητες $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ έχουν πάντοτε την ίδια τιμή $c(b-a)$, ανεξάρτητη της Δ. Άρα τα σύνολα $\{\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) |\, \Delta$ διαμ. του $[a, b]\}$ και $\{\overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) |\, \Delta$ διαμ. του $[a, b]\}$ έχουν ένα μόνο στοιχείο, τον αριθμό $c(b-a)$. Άρα το supremum του πρώτου συνόλου είναι ο $c(b-a)$ και το infimum του δεύτερου συνόλου είναι, επίσης, ο $c(b-a)$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a)$$

και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

Παράδειγμα. θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet** του διαστήματος $[a, b]$. Έστω τυχαία διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ρητοί x και άρρητοι x, οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το

$$\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = \{0, 1\}.$$

Άρα

$$l_k = \inf\{0, 1\} = 0, \qquad u_k = \sup\{0, 1\} = 1.$$

Άρα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} 1(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Άρα το $\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta$ διαμ. του $[a,b]\}$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$, οπότε το supremum του είναι ο 0, και το $\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \mid \Delta$ διαμ. του $[a,b]\}$ είναι το μονοσύνολο $\{b-a\}$, οπότε το infimum του είναι ο $b-a$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b-a > 0.$$

Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, οπότε η f *δεν* είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και *δεν* ορίζεται το $\int_a^b f(x)\,dx$.