ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αν η f^2 είναι παραγωγίσιμη στο I, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I.*

Λύση: Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα I και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, συνεπάγεται ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο I. Άρα για κάθε $x, x_0 \in I$ με $x \neq x_0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)^2 - f(x_0)^2}{x - x_0} \, \frac{1}{f(x) + f(x_0)}$$

και άρα

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)^2 - f(x_0)^2}{x - x_0} \, \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) + f(x_0)} = (f^2)'(x_0) \, \frac{1}{2f(x_0)}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = \frac{(f^2)'(x_0)}{2f(x_0)}$.

Άσκηση 7.2.9. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $\int_a^b f = 0$, αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα, ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Λύση: Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Έστω $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Τότε, επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, συνεπάγεται $\int_{x_1}^{x_2} f \geq 0$, οπότε

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f \geq \int_a^{x_1} f = F(x_1).$$

Άρα η F είναι αύξουσα στο $[a, b]$.
Τώρα, επειδή

$$F(a) = 0, \qquad F(b) = \int_a^b f = 0,$$

συνεπάγεται ότι η F είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$.
Άρα ισχύει

$$f(x) = F'(x) = 0$$

για κάθε $x \in [a, b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής.

Άσκηση 7.2.11. *Έστω f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, a]$ έτσι ώστε η f' να είναι συνεχής στο $[0, a]$ και έστω $f(0) = 0$. Θεωρήστε την συνάρτηση με τύπο*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)^2}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(i) *Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$.*

(ii) *Να συγκρίνετε τις παραγώγους των* $g(x)$ *και* $\int_0^x (f')^2$.

(iii) *Αποδείξτε ότι ισχύει*

$$f(x)^2 \leq x \int_0^x (f')^2 \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a]. \tag{1}$$

(iv) *Αν* $f(a)^2 = a \int_0^a (f')^2$, *αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά* c *ώστε να ισχύει*

$$f(x) = cx \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a].$$

(v) *Αν* $f(a)^2 = a \int_0^a (f')^2$ *και* $f'(0) = 2$, *αποδείξτε ότι ισχύει* $f(x) = 2x$ *για κάθε* $x \in [0, a]$.

Λύση: (i) Για $x \in (0, a]$ έχουμε

$$g'(x) = \frac{2xf(x)f'(x) - f(x)^2}{x^2}.$$

Για $x = 0$, έχουμε

$$g'(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)^2}{x^2} = \Big(\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Big)^2 = f'(0)^2.$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$ και

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2xf(x)f'(x) - f(x)^2}{x^2}, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ f'(0)^2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

(ii) Γράφουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις:

$$g'(x) \leq \Big(\int_0^x (f')^2 \Big)'$$

$$g'(x) \leq f'(x)^2.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, προφανώς, ως ισότητα για $x = 0$, ενώ για $x \in (0, a]$ είναι ισοδύναμη με τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις

$$\frac{2xf(x)f'(x) - f(x)^2}{x^2} \leq f'(x)^2$$

$$2xf(x)f'(x) - f(x)^2 \leq x^2 f'(x)^2$$

$$0 \leq (xf'(x) - f(x))^2.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι σωστή, οπότε ισχύει

$$g'(x) \leq \Big(\int_0^x (f')^2 \Big)' \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a].$$

(iii) Η (1) είναι σωστή ως ισότητα για $x = 0$ και για $x \in (0, a]$ γράφεται ισοδύναμα

$$g(x) \leq \int_0^x (f')^2.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$h(x) = \int_0^x (f')^2 - g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,a].$$

Τότε, βάσει του (ii), ισχύει

$$h'(x) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [0,a].$$

Άρα η h είναι αύξουσα στο $[0,a]$, οπότε ισχύει

$$h(x) \geq h(0) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in (0,a].$$

Άρα η (1) είναι σωστή και για $x \in (0,a]$.

(iv) Αν $f(a)^2 = a \int_0^a (f')^2$, τότε είναι $h(a) = 0$.
Τώρα, επειδή η h είναι αύξουσα στο $[0,a]$ και $h(0) = h(a) = 0$, συνεπάγεται ότι η h είναι σταθερή 0 στο $[0,a]$. Άρα ισχύει

$$\int_0^x (f')^2 - g(x) = h(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [0,a].$$

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$f'(x)^2 = g'(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [0,a].$$

Για $x \in (0,a]$ έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις

$$f'(x)^2 = \frac{2xf(x)f'(x) - f(x)^2}{x^2}$$

$$(xf'(x) - f(x))^2 = 0$$

$$xf'(x) - f(x) = 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$\frac{f(x)}{x} = c \qquad \text{για κάθε } x \in (0,a]$$

και, επομένως,

$$f(x) = cx \qquad \text{για κάθε } x \in (0,a].$$

Το τελευταίο ισχύει ούτως ή άλλως και για $x = 0$, όποια κι αν είναι η σταθερά c.

(v) Συγκρίνοντας τις παραγώγους των δυο πλευρών της τελευταίας σχέσης για $x = 0$, βρίσκουμε ότι

$$c = f'(0) = 2.$$

Για κάθε φυσικό n θεωρούμε μια αντίστοιχη συνάρτηση f_n. Θεωρούμε, επίσης, ότι όλες αυτές οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ είναι ορισμένες στο ίδιο πεδίο ορισμού A. Οι συναρτήσεις αυτές σχηματίζουν μια **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n).

Θεωρούμε και μια συνάρτηση f ορισμένη, επίσης, στο κοινό πεδίο ορισμού A.

Τώρα, λέμε ότι η (f_n) **συγκλίνει** στην f **κατά σημείο** στο A και συμβολίζουμε

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } A$$

αν για κάθε $x \in A$ η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, δηλαδή αν

$$f_n(x) \to f(x) \quad (\text{όταν } n \to +\infty) \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Όταν, λοιπόν, έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) και μια συνάρτηση f, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο ίδιο σύνολο A, και θέλουμε να δούμε αν η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A, τότε παίρνουμε το τυχόν $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ (καθώς $n \to +\infty$).

Μερικές φορές δίνεται η ακολουθία (f_n) αλλά όχι η οριακή συνάρτηση f. Τότε αναζητούμε την f για την οποία θέλουμε να ισχύει ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A. Αυτό γίνεται ως εξής. Πάλι παίρνουμε το τυχόν $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Αν αυτό ισχύει, τότε θέτουμε

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Αυτό το κάνουμε για κάθε $x \in A$ και έτσι σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ένας αριθμός $f(x)$, οπότε ορίζεται μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τώρα, από τον τρόπο που έχει οριστεί αυτή η f είναι προφανές ότι ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A.

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x}{2}, \quad f_3(x) = \frac{x}{3}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad \ldots.$$

Τότε, με τυχόν αλλά σταθερό x, έχουμε το όριο

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \to 0 \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε την σταθερή συνάρτηση 0, τότε

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $(1, +\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad \text{για κάθε } x > 1.$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_2(x) = \frac{x}{x+2}, \quad f_3(x) = \frac{x}{x+3}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad \ldots.$$

Με τυχόν αλλά σταθερό x, έχουμε το όριο

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \to 0 \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } (1, +\infty).$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,1]$ και με τύπο

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3, \quad \ldots, \quad f_n(x) = x^n, \quad \ldots.$$

Με τυχόν αλλά σταθερό x, έχουμε το όριο

$$f_n(x) = x^n \to \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases} \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } [0,1],$$

όπου f είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$