ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 9.2.3. *Έστω οι συναρτήσεις με τύπους* $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ *στο διάστημα* $[0,+\infty)$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση* f *ώστε* $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ *στο* $[0,+\infty)$ *αλλά* $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ *στο* $[0,+\infty)$. *Κατόπιν, να αποδείξετε ότι* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ *στο* $[a,+\infty)$ *για κάθε* $a > 0$.
Λύση: Έχουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } [0,+\infty),$$

όπου η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε το $\|f_n - f\|_{[0,+\infty)}$, βλέπουμε ότι

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{1+nx}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

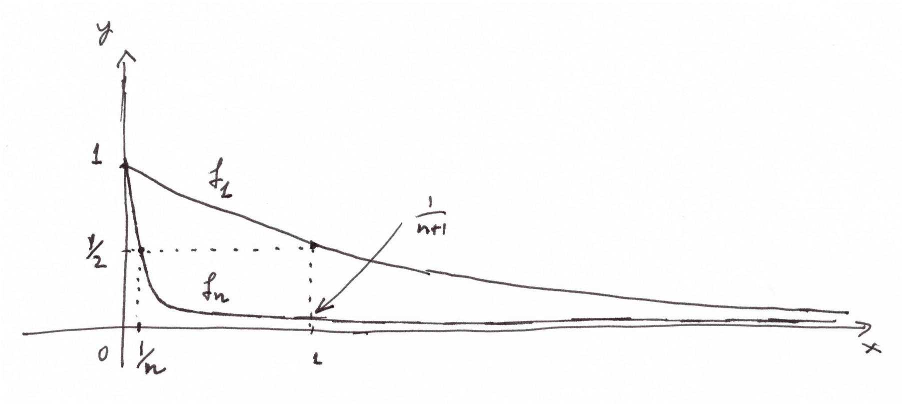
οπότε

$$\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,+\infty)\} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{1+nx} \,\middle|\, x \in (0,+\infty) \right\} = \{0\} \cup (0,1) = [0,1).$$

Άρα

$$\|f_n - f\|_{[0,+\infty)} = \sup[0,1) = 1$$

οπότε $\|f_n - f\|_{[0,+\infty)} \not\to 0$.
Υπάρχει και ένας δεύτερος, έμμεσος τρόπος να αποδείξουμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$, τότε και η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Όμως, η f δεν είναι συνεχής στο 1.



Τέλος, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $a > 0$, το σταθεροποιούμε και θα αποδείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, +\infty)$.
Τώρα,

$$\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in [a, +\infty)\} = \Big\{\frac{1}{1+nx} \,\Big|\, x \in [a, +\infty)\Big\} = \Big(0, \frac{1}{1+na}\Big].$$

Άρα

$$\|f_n - f\|_{[a,+\infty)} = \sup\Big(0, \frac{1}{1+na}\Big] = \frac{1}{1+na}$$

οπότε $\|f_n - f\|_{[a,+\infty)} \to 0$.

Άσκηση 9.2.8. *Έστω οι συναρτήσεις με τύπους $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$ στο $[0,1]$.*
(i) *Να αποδείξτε ότι $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} 0$ στο $[0,1]$.*
(ii) *Για ποιές τιμές της παραμέτρου p ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$;*
(iii) *Για ποιές τιμές της παραμέτρου p ισχύει $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 0$;*
Λύση: (i) Έχουμε

$$f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Πράγματι, αν $0 < x < 1$, τότε θέτουμε $b = \frac{1}{1-x^2} > 1$ και έχουμε το γνωστό όριο

$$\frac{n^p}{b^n} \to 0.$$

Επομένως,

$$f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,1].$$

(ii) Για να βρούμε το

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0,1]\} = \sup\{n^p x(1-x^2)^n \,|\, x \in [0,1]\},$$

θεωρούμε την παράγωγο

$$f_n{}'(x) = n^p(1-x^2)^n - 2n^{p+1}x^2(1-x^2)^{n-1} = n^p(1-x^2)^{n-1}\big(1-(2n+1)x^2\big)$$

και βλέπουμε ότι η f_n είναι μη αρνητική στο $[0,1]$, αύξουσα στο $[0, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, 1]$. Άρα

$$\|f_n\|_{[0,1]} = f_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^n.$$

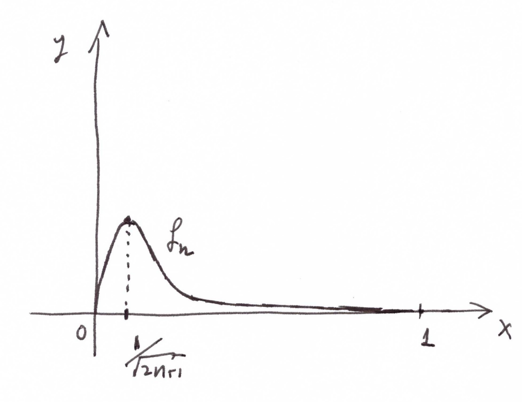
Επειδή

$$\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^n = \frac{1}{(\frac{2n+1}{2n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^n} \to \frac{1}{\sqrt{e}},$$

έχουμε

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \frac{n^{p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^n \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2e}}, & \text{αν } p = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αν } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως, ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $p < \frac{1}{2}$.



(iii) Τέλος,

$$\int_0^1 f_n = n^p \int_0^1 x(1-x^2)^n \, dx = \frac{n^p}{2} \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{n^p}{2} \int_0^1 u^n \, du = \frac{n^p}{2n+2}$$

$$= \frac{n^{p-1}}{2+\frac{2}{n}} \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } p = 1 \\ 0, & \text{αν } p < 1 \end{cases}$$

Άρα ισχύει $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 0 = 0$ αν και μόνο αν $p < 1$.
Παρατηρήστε ότι το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ ισχύει για λιγότερες τιμές της παραμέτρου p από αυτές για τις οποίες ισχύει το $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού γνωρίζουμε ότι το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ συνεπάγεται το $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 0$.

Άσκηση 9.2.10. *Έστω οι συναρτήσεις με τύπους* $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2}$ *στο* $[0,+\infty)$.
(i) *Αποδείξτε ότι* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ *στο* $[0,+\infty)$.
(ii) *Αποδείξτε ότι* ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ *στο* $[0,+\infty)$.
(iii) *Για κάθε* $a > 0$ *αποδείξτε ότι* ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ *στο* $[a,+\infty)$ *και* ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ *στο* $[0,a]$.
Λύση: (i) Έχουμε ότι

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα

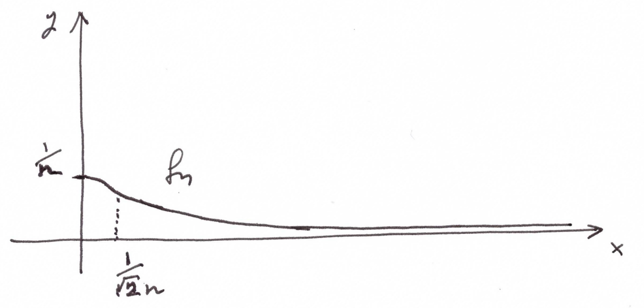
$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$

Επίσης,

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \sup\left\{ \frac{1}{n} e^{-n^2x^2} \,\middle|\, x \in [0,+\infty) \right\} = \frac{1}{n},$$

διότι η f_n είναι φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
Άρα

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$



(ii) Τώρα,

$$f_n{}'(x) = -2nxe^{-n^2x^2} \qquad \text{για } x \in [0, +\infty),$$

οπότε

$$f_n{}'(x) = -2nxe^{-n^2x^2} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα

$$f_n{}' \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0 \qquad \text{στο } [0, +\infty).$$

(iii) Κατόπιν, για οποιοδήποτε (σταθερό) $a > 0$ έχουμε

$$\|f_n{}'\|_{[a,+\infty)} = \sup\{2nxe^{-n^2x^2} \mid x \in [a, +\infty)\}.$$

Η παράγωγος της συνάρτησης με τύπο $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι

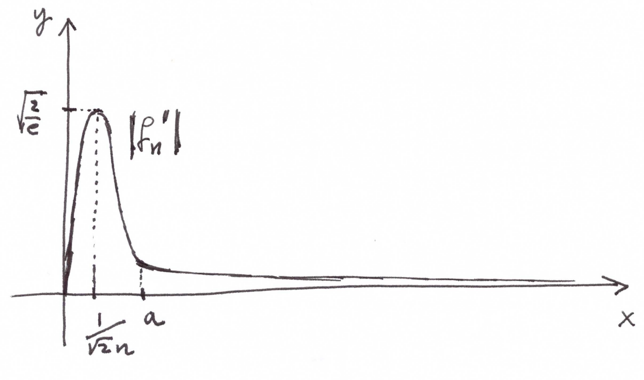
$$2ne^{-n^2x^2} - 4n^3x^2e^{-n^2x^2} = 2ne^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2)$$

και αυτή μηδενίζεται στο σημείο $\frac{1}{\sqrt{2}n}$.
Τώρα βλέπουμε ότι, επειδή το $a > 0$ είναι σταθερό, όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, θα ισχύει $0 < \frac{1}{\sqrt{2}n} \leq a$.
Άρα, όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, η συνάρτηση με τύπο $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, οπότε

$$\|f_n{}'\|_{[a,+\infty)} = 2nae^{-n^2a^2} \to 0$$

και, επομένως,

$$f_n{}' \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \qquad \text{στο } [a, +\infty).$$



Σε σχέση με το διάστημα $[0, a]$ βλέπουμε ότι, όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, το σημείο $\frac{1}{\sqrt{2}n}$ περιέχεται στο διάστημα $[0, a]$, οπότε η συνάρτηση με τύπο $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{1}{\sqrt{2}n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{2}n}, a]$, οπότε

$$\|f_n{}'\|_{[0,a]} = \mathsf{sup}\{2nxe^{-n^2x^2} \mid x \in [0, a]\} = \sqrt{\frac{2}{e}} \not\to 0.$$

Άρα $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0, a]$.