ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 11.1.2. (i) *Είναι η συνάρτηση* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$d(x, y) = (x - y)^2$$

μετρική στο $\mathbb{R}$*;*
(ii) *Ίδια ερώτηση για την* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Λύση: (i) Αρκεί να ελέγξουμε τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.
Προφανώς ισχύει $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Προφανώς ισχύει ότι, αν $d(x, y) = 0$, τότε $x = y$.
Προφανώς ισχύει $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Οπότε απομένει να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{1}$$

για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$(x - y)^2 \leq (x - z)^2 + (z - y)^2$$

κι αυτή ισοδυναμεί με την

$$(z - x)(z - y) \geq 0.$$

Όμως, εύκολα βρίσκουμε τιμές των x, y, z για τις οποίες δεν ισχύει η τελευταία σχέση.
Άρα η d δεν είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.
(ii) Και αυτή η συνάρτηση d ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μιας μετρικής.
Η τριγωνική ανισότητα (1) γράφεται

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}. \tag{2}$$

Προσπαθώντας να αποδείξουμε την (2), παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

και σκεφτόμαστε μήπως ισχύει

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|}. \tag{3}$$

Μπορούμε να θέσουμε $u = |x-y|$ και $v = |x-z|+|z-y|$, οπότε έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$0 \leq u \leq v \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{1 + u} \leq \frac{v}{1 + v}.$$

Αυτό το τελευταίο, όμως, ισχύει και φαίνεται αμέσως με λίγες πράξεις.
Τώρα, η (2) θα προκύψει από την (3) αν αποδείξουμε την

$$\frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}. \tag{4}$$

Θέτουμε $u = |x - z|$ και $v = |z - y|$ και η (4) γίνεται

$$\frac{u+v}{1+u+v} \leq \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v}.$$

Η τελευταία γίνεται

$$\frac{u}{1+u+v} + \frac{v}{1+u+v} \leq \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v}$$

και ισχύει διότι προκύπτει αθροίζοντας τις

$$\frac{u}{1+u+v} \leq \frac{u}{1+u}, \qquad \frac{v}{1+u+v} \leq \frac{v}{1+v},$$

οι οποίες ισχύουν διότι $u, v \geq 0$.
Άρα η (2) ισχύει και η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 11.2.3. (i) *Είναι τα σύνολα*

$$A = \{(x_1, 0) \,|\, a \leq x_1 \leq b\}, \qquad B = \{(x_1, 0) \,|\, a < x_1 < b\}$$

ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$*;*
(ii) *Είναι τα σύνολα*

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 \leq 1\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) \,|\, |x_1 x_2| < 1\}$$

ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$*;*
Λύση: (i) Το A είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$. Είναι εύκολο να δούμε σε ένα σχήμα ότι κάθε σημείο εκτός του A έχει μια κατάλληλη περιοχή του, έναν μικρό δίσκο με κέντρο το σημείο, η οποία δεν τέμνει το A. Αυτό σημαίνει ένα πράγμα με δυο διαφορετικές διατυπώσεις. Η πρώτη διατύπωση είναι: κάθε σημείο εκτός του A δεν είναι οριακό σημείο του A και άρα το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και άρα το A είναι κλειστό. Και η δεύτερη διατύπωση είναι: κάθε σημείο του A^c είναι εσωτερικό σημείο του A^c και άρα το A^c είναι ανοικτό και άρα το A είναι κλειστό.
Από την άλλη μεριά, το A δεν είναι ανοικτό. Διότι αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του A, αυτό δεν είναι εσωτερικό σημείο του A. Για να είναι το σημείο εσωτερικό του A πρέπει να υπάρχει μια κατάλληλη περιοχή του σημείου ολόκληρη μέσα στο A. Όμως, το A δεν είναι "παχύ" ώστε να περιέχει ολόκληρον δίσκο.
(Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το A όχι μόνο δεν είναι ανοικτό αλλά ότι δεν έχει *κανένα* εσωτερικό σημείο.)
(ii) Το B είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$, αλλά χωρίς τα άκρα του.
Το B δεν είναι ανοικτό για τον ίδιο λόγο που το A δεν είναι ανοικτό.
Το B δεν είναι ούτε κλειστό: υπάρχει οριακό σημείο του B που δεν ανήκει στο B. Ένα τέτοιο σημείο είναι το άκρο $(b, 0)$. Πράγματι, κάθε περιοχή του σημείου αυτού, δηλαδή κάθε δίσκος με κέντρο αυτό το σημείο, τέμνει το B. Η τομή αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα αριστερά του $(b, 0)$. Ένα ακόμη οριακό σημείο του B που δεν ανήκει στο B είναι το άλλο άκρο, το $(a, 0)$.

Άσκηση 11.2.12. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* A *ανοικτό και* B *κλειστό υποσύνολο του* X*. Αποδείξτε ότι το* $A \setminus B$ *είναι ανοικτό και το* $B \setminus A$ *είναι κλειστό.*
Λύση: Γράφουμε

$$A \setminus B = A \cap B^c, \qquad B \setminus A = B \cap A^c.$$

Από την πρώτη σχέση και από το ότι το B^c είναι ανοικτό συνεπάγεται ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό.
Από την δεύτερη σχέση και από το ότι το A^c είναι κλειστό συνεπάγεται ότι το $B \setminus A$ είναι κλειστό.

Άσκηση 11.2.14. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
Λύση: Έστω $x \in A^\circ$. Τότε το x είναι εσωτερικό του A, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$N_x(r) \subseteq A.$$

Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται

$$N_x(r) \subseteq B,$$

οπότε το x είναι εσωτερικό του B και άρα $x \in B^\circ$.
Άρα $A^\circ \subseteq B^\circ$.
Έστω $x \in \overline{A}$. Τότε το x είναι οριακό του A, οπότε για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ τέμνει το A. Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται ότι για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ τέμνει και το B και άρα το x είναι οριακό του B, οπότε $x \in \overline{B}$.
Άρα $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Άσκηση 11.6.1. *Αποδείξτε ότι τα σύνολα*

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}, \quad B = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq x_3 \leq 1\}$$

είναι συμπαγή υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντιστοίχως.
Λύση: Το A είναι ένα κλειστό τρίγωνο στο επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ και είναι τομή τριών κλειστών ημιεπιπέδων:

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

Αν θέσουμε $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$, τότε τα τρία κλειστά ημιεπίπεδα περιγράφονται με τις αντίστοιχες ανισότητες

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_1 \rangle \geq 0, \qquad \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_2 \rangle \geq 0, \qquad \langle \mathsf{x}, \mathsf{k} \rangle \leq 1,$$

όπου $\mathsf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathsf{e}_2 = (0, 1)$, $\mathsf{k} = (1, 1)$.
Γνωρίζουμε ότι κάθε κλειστό ημιεπίπεδο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$ είναι κλειστό σύνολο. Άρα το A, ως τομή κλειστών συνόλων, είναι κλειστό.
Από την άλλη μεριά, το A είναι φραγμένο σύνολο. Πράγματι, για κάθε $(x_1, x_2) \in A$ έχουμε

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1,$$

οπότε το A είναι υποσύνολο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου

$$[0, 1] \times [0, 1].$$

Άρα το A είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.
Για το B έχουμε το εξής:

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq x_3\} \cap \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 \leq 1\}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\mathsf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_3$$

και τότε:

$$\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,{x_1}^2+{x_2}^2\le x_3\} = \{\mathsf{x}\,|\,f(\mathsf{x})\le 0\} = \{\mathsf{x}\,|\,f(\mathsf{x})\in(-\infty,0]\}$$
$$= f^{-1}\big((-\infty,0]\big).$$

Η f είναι πολυωνυμική και άρα είναι συνεχής. Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^3$ και αυτό είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$. Επειδή το $(-\infty,0]$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}\big((-\infty,0]\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(\mathsf{x}) = g(x_1,x_2,x_3) = x_3$$

και τότε:

$$\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_3\le 1\} = \{\mathsf{x}\,|\,g(\mathsf{x})\le 1\} = \{\mathsf{x}\,|\,g(\mathsf{x})\in(-\infty,1]\} = g^{-1}\big((-\infty,1]\big).$$

Ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση, βλέπουμε ότι το $g^{-1}\big((-\infty,1]\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Άρα το B είναι τομή κλειστών, οπότε είναι κλειστό.
Τέλος, βλέπουμε εύκολα ότι το B είναι φραγμένο. Για κάθε $(x_1,x_2,x_3)\in B$ έχουμε

$$|x_1|\le 1,\quad |x_2|\le 1,\quad 0\le x_3\le 1.$$

Άρα το B είναι υποσύνολο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

$$[-1,1]\times[-1,1]\times[0,1],$$

οπότε είναι φραγμένο.
Άρα το B είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.

Άσκηση 11.6.18. *Έστω μετρικός χώρος (x,d), μη-κενό συμπαγές $M\subseteq X$ και $x_0\in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο $x'\in M$ ώστε*

$$d(x_0,x') = \inf\{d(x_0,x)\,|\,x\in M\}.$$

Λύση: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $x'\in M$ του οποίου η απόσταση από το x_0 είναι ελάχιστη ανάμεσα στις αποστάσεις όλων των $x\in M$ από το x_0.
Το σύνολο

$$A = \{d(x_0,x)\,|\,x\in M\}$$

είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με κάτω φράγμα το 0. (Ισχύει $d(x_0,x)\ge 0$ για κάθε $x\in M$.)
Άρα υπάρχει το infimum του A και είναι αριθμός ≥ 0.
Θέτουμε

$$l = \inf A.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο του A ανάμεσα στα l και $l+\frac{1}{n}$. Δηλαδή υπάρχει $x_n\in M$ ώστε

$$l\le d(x_0,x_n) < l+\frac{1}{n}.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο M και, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει σε στοιχείο του M. Δηλαδή, υπάρχει (x_{n_k}) ώστε

$$x_{n_k}\to x' \qquad \text{όταν } k\to+\infty$$

για κάποιο $x' \in M$.
Από τις σχέσεις

$$l \leq d(x_0, x_{n_k}) < l + \frac{1}{n_k}$$

συνεπάγεται ότι

$$d(x_0, x_{n_k}) \to l \qquad \text{όταν } k \to +\infty. \tag{5}$$

Όμως, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$-d(x_{n_k}, x') \leq d(x_0, x_{n_k}) - d(x_0, x') \leq d(x_{n_k}, x')$$

και, επειδή $d(x_{n_k}, x') \to 0$, συνεπάγεται

$$d(x_0, x_{n_k}) \to d(x_0, x') \qquad \text{όταν } k \to +\infty. \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει το

$$d(x_0, x') = l.$$