ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*
[α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το A^c είναι κλειστό.*
[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. [α] Έχουμε τις εξής διαδοχικές ισοδυναμίες: "το A είναι ανοικτό" αν και μόνο αν "όλα τα σημεία του A είναι εσωτερικά σημεία του A" αν και μόνο αν "κανένα σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A^c" αν και μόνο αν "το A^c περιέχει όλα τα οριακά σημεία του A^c" αν και μόνο αν "το A^c είναι κλειστό".
[β] Θέτουμε $B = A^c$, οπότε $B^c = A$, και εφαρμόζουμε το [α] στο σύνολο B: "το A είναι κλειστό" αν και μόνο αν "το B^c είναι κλειστό" αν και μόνο αν "το B είναι ανοικτό" αν και μόνο αν "το A^c είναι ανοικτό". $\square$

Παράδειγμα. Έστω $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathsf{a} \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$.
Θεωρούμε το υπερεπίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα a και από τον αριθμό a, δηλαδή το

$$\Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle = a\},$$

καθώς και τους δυο ανοικτούς ημιχώρους

$$A_1 = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle > a\}, \qquad A_2 = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle < a\}.$$

Στο $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε την Ευκλείδεια μετρική.
Έχουμε αποδείξει ότι κάθε σημείο του A_1 είναι εσωτερικό σημείο του A_1, οπότε το A_1 είναι ανοικτό σύνολο. Ομοίως, και το A_2 είναι ανοικτό σύνολο.
Αυτό σημαίνει ότι τα συμπληρώματα των A_1 και A_2, δηλαδή οι αντίστοιχοι κλειστοί ημιχώροι

$$A_2 \cup \Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle \leq a\}, \qquad A_1 \cup \Gamma = \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{a} \rangle \geq a\},$$

είναι κλειστά σύνολα.
Τώρα, η ένωση $A_1 \cup A_2$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και άρα είναι ανοικτό σύνολο. Άρα το συμπλήρωμα, δηλαδή το υπερεπίπεδο Γ είναι κλειστό σύνολο. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και ως εξής: το Γ είναι η τομή των κλειστών συνόλων $A_1 \cap \Gamma$ και $A_2 \cap \Gamma$ και άρα είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα. Το

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] = \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, a_k \leq x_k \leq b_k \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, d\}$$

ονομάζεται **κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.
Αν για κάθε $k = 1, \ldots, d$ θεωρήσουμε το διάνυσμα $\mathsf{e}_k \in \mathbb{R}^d$ το οποίο έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 0 εκτός από την k-οστή η οποία είναι ίση με 1, τότε έχουμε ότι για κάθε $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ ισχύει

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle = x_k.$$

Άρα το κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Q είναι ίσο με την εξής τομή $2d$ κλειστών ημιχώρων:

$$Q = \bigcap_{k=1}^{d} \big(\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle \geq a_k\} \cap \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle \leq b_k\}\big).$$

Όπως είδαμε, κάθε κλειστός ημιχώρος είναι κλειστό σύνολο οπότε κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Αναλόγως, το **ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**

$$Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) = \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, a_k < x_k < b_k \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, d\}$$

στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι ίσο με την τομή $2d$ ανοικτών ημιχώρων

$$Q = \bigcap_{k=1}^{d} \big(\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle > a_k\} \cap \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathsf{x}, \mathsf{e}_k \rangle < b_k\}\big),$$

Άρα κάθε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $y_0 \in Y$. Λέμε ότι το y_0 είναι **όριο** της f στο x_0, και συμβολίζουμε*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$x \in A,\ 0 < d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), y_0) < \epsilon.$$

Ο ορισμός αυτός είναι η άμεση γενίκευση του ορισμού του ορίου συνάρτησης όταν και οι δυο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή έχουμε: $d(x, x_0) = |x - x_0|$ και $\rho(f(x), y_0) = |f(x) - y_0|$.

Αν κάποιος (ή και οι δύο) από τους μετρικούς χώρους (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$, τότε έχουμε: $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_2$ ή $\rho(f(x), y_0) = \|f(x) - y_0\|_2$ και ο ορισμός του ορίου παίρνει την ανάλογη μορφή.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:*

$$x \in A,\ d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Αν το $x_0 \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή είναι **μεμονωμένο σημείο** του A), τότε μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα, ακριβώς όπως όταν και οι δυο μετρικοί χώροι είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$, ότι η f είναι αυτομάτως συνεχής στο x_0. Αναλόγως, αν το $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικοί χώροι* (X, d), (Y, ρ) *και* (Z, τ), $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $x_0 \in A$, $f : A \to B$ *και* $g : B \to Z$ *(οπότε ορίζεται η σύνθεση* $g \circ f : A \to Z$*). Αν η* f *είναι συνεχής στο* x_0 *και η* g *είναι συνεχής στο* $y_0 = f(x_0)$*, τότε η* $g \circ f$ *είναι συνεχής στο* x_0*.*

Η απόδειξη της Πρότασης αυτής καθώς και της επόμενης Πρότασης είναι στο βιβλίο. Όλες οι αποδείξεις είναι απλή επανάληψη των αντίστοιχων αποδείξεων όταν οι εμπλεκόμενοι μετρικοί χώροι είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ *και* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* x_0*. Τότε:*
[α] *η* $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* x_0 *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*
[β] *η* $fg : A \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* x_0*.*
[γ] *αν* $B = \{x \in A \,|\, g(x) \neq 0\}$ *και* $g(x_0) \neq 0$*, τότε η* $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* x_0*.*

Παράδειγμα. Στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται για κάθε k με $1 \leq k \leq d$ η συνάρτηση k-**προβολή**

$$\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\pi_k(\mathsf{x}) = x_k \qquad \text{για κάθε } \mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Κάθε π_k είναι συνεχής, διότι ισχύει

$$|\pi_k(\mathsf{x}) - \pi_k(\mathsf{x}_0)| = |x_k - x_{0k}| \leq \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \cdots + (x_d - x_{0d})^2} = \|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0\|_2$$

για κάθε $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και $\mathsf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0d})$ στον $\mathbb{R}^d$.
Πράγματι, αν επιλέξουμε δ με $0 < \delta \leq \epsilon$, τότε προφανώς έχουμε

$$\|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0\|_2 < \delta \quad \Rightarrow \quad |\pi_k(\mathsf{x}) - \pi_k(\mathsf{x}_0)| < \epsilon.$$

Ειδική περίπτωση είναι οι *πολυωνυμικές συναρτήσεις* $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεις με τύπο

$$p(x_1, \ldots, x_d) = A{x_1}^{a_1} \cdots {x_d}^{a_d} + B{x_1}^{b_1} \cdots {x_d}^{b_d} + \cdots,$$

όπου όλοι οι εκθέτες είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί και το άθροισμα είναι πεπερασμένο.
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την πολυωνυμική συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο

$$p(\mathsf{x}) = p(x_1, x_2) = 3{x_1}^2 x_2 - 5x_1x_2 + 6{x_1}^2 + 7.$$

Επειδή για κάθε $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$ ισχύει

$$\pi_1(\mathsf{x}) = x_1, \quad \pi_2(\mathsf{x}) = x_2,$$

συνεπάγεται

$$p(\mathsf{x}) = 3{\pi_1}^2(\mathsf{x})\pi_2(\mathsf{x}) - 5\pi_1(\mathsf{x})\pi_2(\mathsf{x}) + 6{\pi_1}^2(\mathsf{x}) + 7$$

και άρα

$$p = 3{\pi_1}^2\pi_2 - 5\pi_1\pi_2 + 6{\pi_1}^2 + 7.$$

Επειδή οι π_1, π_2 είναι συνεχείς, συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση p είναι συνεχής.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και οι *ρητές συναρτήσεις*, δηλαδή λόγοι πολυωνυμικών συναρτήσεων, είναι συνεχείς (εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής).