ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ας δούμε μια αναδιατύπωση του ορισμού της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο.

Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$x \in A,\ d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Το τελευταίο γράφεται ισοδύναμα

$$x \in A,\ x \in N_{x_0}(\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$$

ή, ισοδύναμα,

$$x \in A \cap N_{x_0}(\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$$

ή, ισοδύναμα,

η f απεικονίζει το $A \cap N_{x_0}(\delta)$ μέσα στο $N_{f(x_0)}(\epsilon)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) *Η f είναι συνεχής στο A.*
(ii) *Για κάθε ανοικτό $W \subseteq Y$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = A \cap U$.*
(iii) *Για κάθε κλειστό $F \subseteq Y$ υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = A \cap G$.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο A, δηλαδή συνεχής σε κάθε σημείο του A.
Έστω οποιοδήποτε ανοικτό $W \subseteq Y$ και τυχόν $x \in f^{-1}(W)$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in A$ και $f(x) \in W$.
Επειδή το W είναι ανοικτό, το $f(x)$ είναι εσωτερικό σημείο του W, οπότε υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε

$$N_{f(x)}(\epsilon_x) \subseteq W.$$

Κατόπιν, η f είναι συνεχής στο x, οπότε υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε να ισχύει

$$z \in A \cap N_x(\delta_x) \quad \Rightarrow \quad f(z) \in N_{f(x)}(\epsilon_x) \quad \Rightarrow \quad f(z) \in W \quad \Rightarrow \quad z \in f^{-1}(W).$$

Άρα

$$A \cap N_x(\delta_x) \subseteq f^{-1}(W) \qquad \text{για κάθε } x \in f^{-1}(W).$$

Θεωρούμε την ένωση των συνόλων $A \cap N_x(\delta_x)$ όταν το x διατρέχει το $f^{-1}(W)$. Η τελευταία σχέση λέει ότι όλα αυτά τα σύνολα περιέχονται στο $f^{-1}(W)$ και άρα

$$\bigcup_{x \in f^{-1}(W)} \big(A \cap N_x(\delta_x)\big) \subseteq f^{-1}(W)$$

και άρα

$$A \cap \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} N_x(\delta_x) \subseteq f^{-1}(W)$$

Τώρα ορίζουμε

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} N_x(\delta_x).$$

Το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, διότι είναι ένωση ανοικτών περιοχών, δηλαδή ανοικτών υποσυνόλων του X, και η τελευταία σχέση που αποδείξαμε γράφεται:

$$A \cap U \subseteq f^{-1}(W).$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει, προφανώς, $x \in A$. Επίσης για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει $x \in N_x(\delta_x) \subseteq U$ και άρα $x \in U$. Άρα

$$f^{-1}(W) \subseteq A \cap U$$

και συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}(W) = A \cap U$.

$[ii \Rightarrow i]$. Παίρνουμε τυχόν $x \in A$ για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Η ανοικτή περιοχή $N_{f(x)}(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση (ii), υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε

$$f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = A \cap U.$$

Επειδή $f(x) \in N_{f(x)}(\epsilon)$, συνεπάγεται $x \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = A \cap U$ και, επομένως, $x \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x(\delta) \subseteq U$. Συνεπάγεται

$$A \cap N_x(\delta) \subseteq f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big).$$

Άρα

$$z \in A \cap N_x(\delta) \quad \Rightarrow \quad z \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) \quad \Rightarrow \quad f(z) \in N_{f(x)}(\epsilon).$$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x.

Για την ισοδυναμία ανάμεσα στα (ii) και (iii) δείτε στο βιβλίο. $\square$

Τώρα θα δούμε δυο σημαντικά πορίσματα του Θεωρήματος σε δυο αντίστοιχες ειδικές περιπτώσεις για το πεδίο ορισμού A της f.

Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$.

Πρώτη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο A και ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε ανοικτό υποσύνολο W του Y το $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Πράγματι, το Θεώρημα λέει ότι υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = A \cup U$ και, επειδή και το A είναι ανοικτό, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό.

Δεύτερη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο A και ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Συμπεραίνουμε ότι για κάθε κλειστό υποσύνολο F υποσύνολο του Y το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Πράγματι, το Θεώρημα λέει ότι υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = A \cup G$ και, επειδή και το A είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

Τα δυο αυτά πορίσματα διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Αν η f είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της είναι ανοικτό, τότε αντίστροφη εικόνα ανοικτού είναι ανοικτό.

Αν η f είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό, τότε αντίστροφη εικόνα κλειστού είναι κλειστό.

Έχουμε και ένα "κοινό" πόρισμα όταν $A = X$, δηλαδή όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρος ο χώρος X. Τότε το A είναι ανοικτό και κλειστό, οπότε:

Αν η f είναι συνεχής σε ολόκληρο τον χώρο, τότε αντίστροφη εικόνα ανοικτού είναι ανοικτό και αντίστροφη εικόνα κλειστού είναι κλειστό.

Παράδειγμα. Θα δούμε τώρα μια σημαντική μέθοδο αναγνώρισης ανοικτών ή κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. *Θεωρούμε συναρτήσεις με τιμές στο* $\mathbb{R}$.
Έστω υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, d), $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και $a, b \in \mathbb{R}$.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *ανοικτό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a < f(x)\} = f^{-1}((a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b)),$$

$$\{x \in A \,|\, a < f(x) < b\} = f^{-1}((a, b))$$

είναι ανοικτά υποσύνολα του X.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *κλειστό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a \le f(x)\} = f^{-1}([a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) \le b\} = f^{-1}((-\infty, b]),$$

$$\{x \in A \,|\, a \le f(x) \le b\} = f^{-1}([a, b])$$

είναι κλειστά υποσύνολα του X.
Φυσικά, εκτός από διαστήματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πιο ειδικά, αν η f είναι *πολυωνυμική* συνάρτηση d πραγματικών μεταβλητών, τότε η $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το πεδίο ορισμού της είναι ολόκληρος ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$. Επομένως, σύνολα όπως τα $\{x \in A \,|\, a < f(x)\}$, $\{x \in A \,|\, f(x) < b\}$, $\{x \in A \,|\, a < f(x) < b\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και σύνολα όπως τα $\{x \in A \,|\, a \le f(x)\}$, $\{x \in A \,|\, f(x) \le b\}$, $\{x \in A \,|\, a \le f(x) \le b\}$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Αν η f είναι *ρητή* συνάρτηση d πραγματικών μεταβλητών, τότε η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A και για να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα πρέπει να μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό.
Για παράδειγμα, το πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης με τύπο

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

είναι το $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Το σύνολο αυτό είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ διότι το συμπλήρωμά του είναι το μονοσύνολο $\{(0, 0, 0)\}$ το οποίο είναι κλειστό.
Άλλο παράδειγμα: το πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης με τύπο

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{{x_1}^2 - {x_2}^2}$$

είναι το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 = \pm x_1\}$. Το σύνολο αυτό είναι ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$ διότι το συμπλήρωμά του είναι η ένωση των ευθειών με εξισώσεις $x_2 = x_1$ και $x_2 = -x_1$. Κάθε ευθεία είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, οπότε η ένωση δυο ευθειών είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.