ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ο επόμενος ορισμός είναι γενίκευση του ορισμού του ορίου ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n)* **συγκλίνει** *στο x στον (X, d) ή ότι το x είναι* **όριο** *της (x_n) στον (X, d), και συμβολίζουμε*

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x) < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $d(x_n, x) < \epsilon$.

Η επόμενη πρόταση ανάγει τη σύγκλιση ακολουθιών στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $\mathsf{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$ για κάθε n και $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Τότε $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στο $\mathbb{R}^d$ αν και μόνο αν $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στο $\mathbb{R}^d$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει τελικά $\|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}\| < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει τελικά

$$0 \leq |x_{n,k} - x_k| \leq \sqrt{(x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2} = \|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}\| < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $k = 1, \ldots, d$ έχουμε ότι $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$.
Αντιστρόφως, έστω $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $|x_{n,k} - x| < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$. Άρα ισχύει τελικά

$$\|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}\| = \sqrt{(x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2} < \sqrt{d\,\frac{\epsilon^2}{d}} = \epsilon.$$

Άρα $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □

Θα δούμε, τώρα, την πολύ ισχυρή σχέση ανάμεσα στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών και σε διάφορες έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει: την έννοια του οριακού σημείου, την έννοια του κλειστού υποσυνόλου (και, εμμέσως, του ανοικτού υποσυνόλου) και την έννοια της συνέχειας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.
Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
Ειδικώτερα, ισχύει $d(x_{n_0}, x) < \epsilon$, δηλαδή $x_{n_0} \in N_x(\epsilon)$.
Άρα κάθε περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και, επομένως, το x είναι οριακό σημείο του A.

Αντιστρόφως, έστω ότι το x είναι οριακό σημείο του A.
Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στην περιοχή $N_x\big(\frac{1}{n}\big)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και έστω x_n ένα τέτοιο στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει

$$x_n \in A \quad \text{και} \quad d(x_n, x) < \frac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Άρα δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $x_n \to x$. $\square$

Δείτε στο βιβλίο το ανάλογο αποτέλεσμα για σημείο συσσώρευσης αντί οριακού σημείου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν κάθε x, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο A, ανήκει στο A.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι κλειστό και έστω τυχόν x το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο A. Δηλαδή, υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Βάσει της προηγούμενης Πρότασης, το x είναι οριακό σημείο του A, οπότε, επειδή το A είναι κλειστό, ισχύει $x \in A$.
Αντιστρόφως, έστω ότι κάθε x, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο A, ανήκει στο A.
Θεωρούμε τυχόν οριακό σημείο x του A. Τότε, από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο x. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, το x ανήκει στο A. Άρα το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του, οπότε είναι κλειστό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
Έστω (x_n) στο A με $x_n \to x_0$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$, οπότε, επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$x \in A,\ d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) < \epsilon. \tag{1}$$

Κατόπιν, επειδή $x_n \to x$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_0) < \delta. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon.$$

Άρα $f(x_n) \to f(x_0)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.
Θα υποθέσουμε (για άτοπο) ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο x_0.
Τότε υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \text{ με } d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ και } \rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon.$$

Τότε η ακολουθία (x_n) είναι στο A και ισχύει $x_n \to x_0$ αλλά όχι $f(x_n) \to f(x_0)$.
Καταλήγουμε σε άτοπο και άρα η f είναι συνεχής στο x_0. $\square$

Δείτε στο βιβλίο το ανάλογο αποτέλεσμα για όριο συνάρτησης αντί συνέχειας συνάρτησης.

Ο επόμενος ορισμός αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου ορισμού για ακολουθίες στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n) είναι* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε:*

$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν η (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Με απλή αλλαγή του συμβόλου του δείκτη, ισχύει $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **πλήρες** *αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του A.*
Ο ίδιος ο χώρος (X, d) χαρακτηρίζεται **πλήρης** *αν το X είναι πλήρες, δηλαδή αν κάθε ακολουθία (x_n) στο X, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του X.*

Παράδειγμα. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}^d$.
Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε:

$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}_m\|_2 < \epsilon.$$

Αν

$$\mathsf{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d}),$$

τότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \|\mathsf{x}_n - \mathsf{x}_m\|_2 < \epsilon$$

και, επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ η $(x_{n,k})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$.
Όμως, ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, οπότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ υπάρχει $x_k \in \mathbb{R}$ ώστε $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$. Τώρα ορίζουμε

$$\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$$

και έχουμε ότι $\mathsf{x}_n \to \mathsf{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □