# ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

# ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Βάσει των μέχρι τώρα ορισμών, έχουμε ότι, αν η $f$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$, τότε ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \tag{1}$$

για κάθε δυο διαμερίσεις $\Delta'$ και $\Delta''$ του $[a,b]$. Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε αυτές οι ανισότητες γράφονται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το βασικό *θεωρητικό* κριτήριο για να αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ.** *Έστω $f$ φραγμένη στο $[a,b]$. Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\Delta$ του $[a,b]$ ώστε*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή το $\underline{\int_a^b} f$ είναι το supremum των $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει διαμέριση $\Delta'$ του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Ομοίως, επειδή το $\overline{\int_a^b} f$ είναι το infimum των $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει διαμέριση $\Delta''$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$. Άρα

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \epsilon.$$

Τώρα θεωρούμε μια διαμέριση λεπτότερη από τις $\Delta'$, $\Delta''$, για παράδειγμα την $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. Τότε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω $\epsilon > 0$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει διαμέριση $\Delta$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Τότε από την (1) με $\Delta' = \Delta'' = \Delta$ συνεπάγεται

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται

$$(0 \leq) \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 0.$$

Άρα $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ και η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

**Παράδειγμα.** Έστω $\xi \in [a, b]$. Ένα πολύ απλό παράδειγμα συνάρτησης είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a, b], x \neq \xi \\ 1, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

Η $f$ είναι σταθερή $0$ στο $[a, b]$ εκτός στο σημείο $\xi$ στο οποίο έχει τιμή $1$. Ως εφαρμογή του κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας αποδεικνύεται εύκολα ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι

$$\int_a^b f = 0.$$

Διαβάστε την απόδειξη στο βιβλίο, σχεδιάζοντας τις κατάλληλες διαμερίσεις.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Αν η $f$ είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι η $f$ είναι αύξουσα στο $[a, b]$, οπότε $f(a) \leq f(b)$, και έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε κάποιο $\delta > 0$, την ακριβή τιμή του οποίου θα προσδιορίσουμε σε λίγο, και θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα υποδιαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } k = 1, \ldots, n.$$

Επειδή η $f$ είναι αύξουσα, είναι $l_k = f(x_{k-1})$ και $u_k = f(x_k)$, οπότε

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)\delta \\ &= \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Βλέπουμε, τώρα, ότι είναι αρκετό να πάρουμε οποιοδήποτε $\delta$ με $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a) + 1}$ και αυτό θα μας εξασφαλίσει ότι υπάρχει διαμέριση $\Delta$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

(Προσθέτουμε το $1$ στον παρονομαστή για την περίπτωση που είναι $f(a = f(b)$. Αν $f(a) < f(b)$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον λόγο $\frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$.)
Άρα η $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Η απόδειξη στην περίπτωση που η $f$ είναι φθίνουσα είναι παρόμοια. □

Για να αποδείξουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες σε κλειστά, φραγμένα διαστήματα θα χρειαστούμε μια βαθύτερη ιδιότητα αυτών των συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα συνεχής** στο $A$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$x', x'' \in A, |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \epsilon. \tag{2}$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Αν η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A$, τότε είναι συνεχής στο $A$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in A$. Θα αποδείξουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας στο $A$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (2). Εφαρμόζοντας την (2) με $x'' = x$ (το $x$ που έχουμε επιλέξει) και με $x' = t$ (ένα μεταβλητό $t$), βλέπουμε ότι

$$t \in A, |t - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(x)| < \epsilon.$$

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $x$.
Επειδή το $x$ είναι οποιοδήποτε σημείο του $A$, η $f$ είναι συνεχής στο $A$. □

Το αντίστροφο της τελευταίας Πρότασης δεν είναι σωστό. Υπάρχουν συναρτήσεις $f$ συνεχείς σε κάποιο σύνολο $A$ οι οποίες δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $A$.

**Παράδειγμα.** Έστω η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2.$$

Γνωρίζουμε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι η $f$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Τότε για $\epsilon = 1$ (για παράδειγμα) πρέπει να υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$|x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(x')^2 - (x'')^2| < 1.$$

Θεωρούμε $x' = x$ και $x'' = x + \frac{\delta}{2}$ για τυχαίο $x$ και τότε προφανώς

$$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Άρα θα πρέπει για κάθε $x$ να ισχύει

$$|(x')^2 - (x'')^2| < 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| < 1.$$

Αυτό, όμως, είναι αδύνατο να ισχύει για κάθε $x$ διότι

$$\lim_{x \to +\infty} \left|\delta x + \frac{\delta^2}{4}\right| = +\infty,$$

οπότε αν πάρουμε αρκετά μεγάλο $x$ θα βρούμε $|\delta x + \frac{\delta^2}{4}| \geq 1$.
Άρα η $f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.