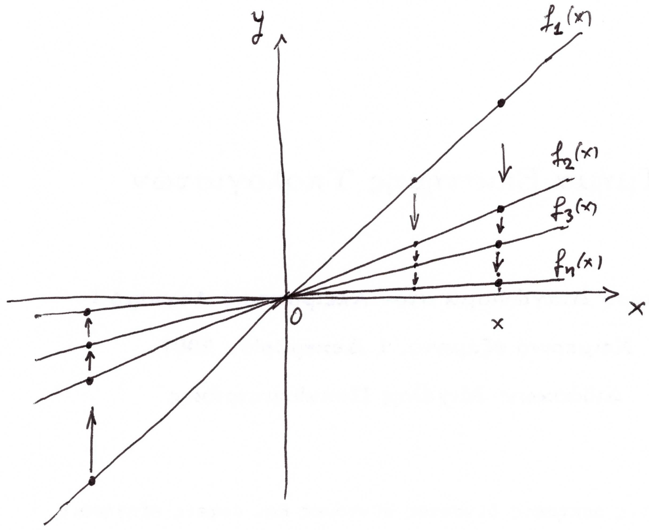
ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

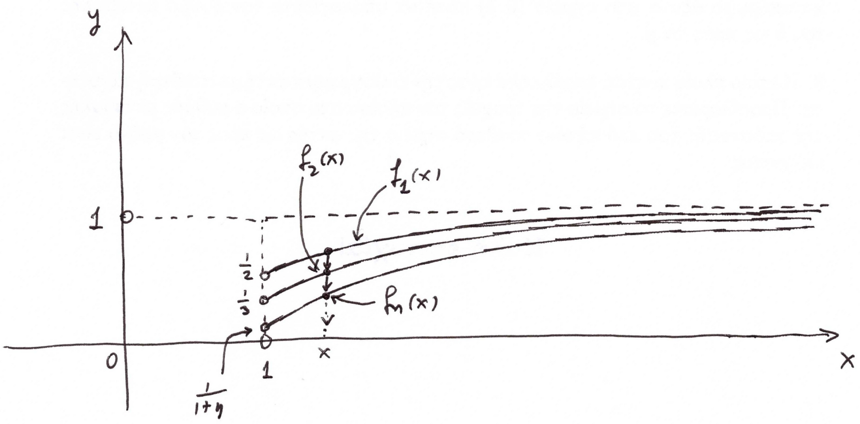
ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ας δούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων των τριών τελευταίων παραδειγμάτων του τελευταίου μαθήματος.

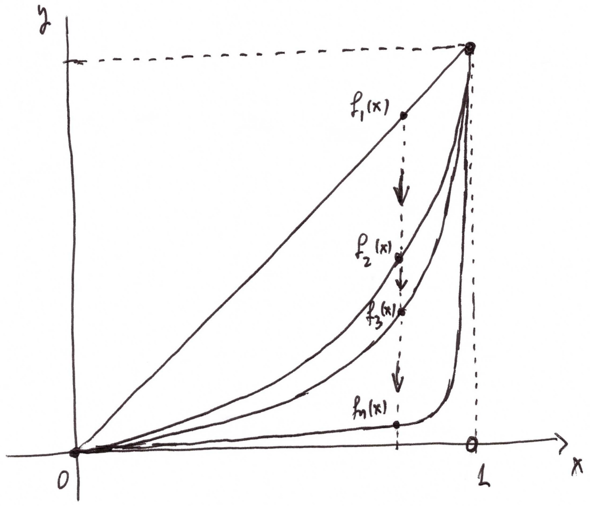
Στο πρώτο παράδειγμα το γράφημα καθεμιάς $f_n(x) = \frac{x}{n}$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $\frac{1}{n}$. Όταν μεγαλώνει το n η κλίση της ευθείας μικραίνει και η ευθεία τείνει να ταυτιστεί με τον x-άξονα. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα οποιοδήποτε x, τα ύψη $|f_n(x)| = \frac{|x|}{n}$ μικραίνουν και τείνουν στο 0. Βέβαια, αν σταθεροποιήσουμε το n, τότε τα όρια της $f_n(x)$ όταν $x \to \pm\infty$ είναι $\pm\infty$. Αλλά δεν μας ενδιαφέρει να σταθεροποιήσουμε το n. Μας ενδιαφέρει να σταθεροποιήσουμε το x και να πάρουμε όριο όταν $n \to +\infty$. (Αυτό, φυσικά, πρέπει να γίνει για κάθε x.)



Στο δεύτερο παράδειγμα το γράφημα καθεμιάς $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ είναι μια κοίλη και γνησίως αύξουσα καμπύλη που ξεκινάει από ύψος $\frac{1}{1+n}$ στο 1 και τείνει ασυμπτωτικά στην οριζόντια ευθεία σε ύψος 1. Το γράφημα της $f_{n+1}(x) = \frac{x}{x+n+1}$ είναι κάτω από το γράφημα της $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ και όταν το n μεγαλώνει το γράφημα της f_n χαμηλώνει και τείνει να ταυτιστεί με τον x-άξονα. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα οποιοδήποτε x, τα ύψη $|f_n(x)| = \frac{x}{x+n}$ μικραίνουν και τείνουν στο 0. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι, αν σταθεροποιήσουμε το n, τότε το όριο της $f_n(x)$ όταν $x \to +\infty$ είναι 1. Αλλά δεν μας ενδιαφέρει να σταθεροποιήσουμε το n. Μας ενδιαφέρει να σταθεροποιήσουμε το τυχόν x και να πάρουμε όριο όταν $n \to +\infty$.



Στο τρίτο παράδειγμα το γράφημα καθεμιάς $f_n(x) = x^n$ είναι μια κοίλη και γνησίως αύξουσα καμπύλη που ξεκινάει από το σημείο $(0, 0)$ και φτάνει στο σημείο $(1, 1)$. Το γράφημα της $f_{n+1}(x) = x^{n+1}$ είναι κάτω από το γράφημα της $f_n(x) = x^n$ και όταν το n μεγαλώνει το γράφημα της f_n στο διάστημα $[0, 1)$ χαμηλώνει και τείνει να ταυτιστεί με τον x-άξονα αλλά το σημείο $(1, 1)$ του γραφήματος μένει αμετάβλητο. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα οποιοδήποτε x στο διάστημα $[0, 1)$, τα ύψη $|f_n(x)| = x^n$ μικραίνουν και τείνουν στο 0 αλλά το ύψος 1 στο σημείο 1 μένει αμετάβλητο. Γι αυτό το γράφημα της οριακής συνάρτησης είναι ασυνεχές και αποτελείται από τον x-άξονα στο διάστημα $[0, 1)$ και από το σημείο $(1, 1)$.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx} \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad f_2(x) = \frac{x}{1 + 2x}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}, \quad \ldots.$$

Με τυχόν αλλά σταθερό $x \in [0, +\infty)$, έχουμε το όριο

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

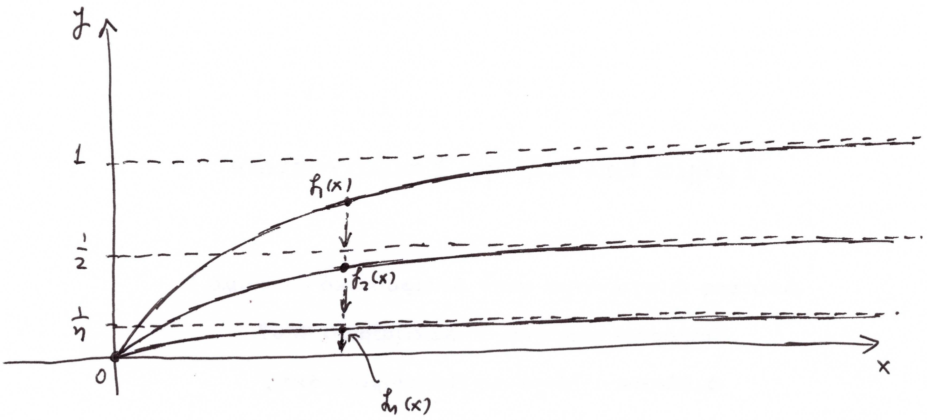
Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0, +\infty).$$

Κάθε f_n είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$ και

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + nx} = \frac{1}{n}.$$

Στο παράδειγμα αυτό το γράφημα καθεμιάς $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ είναι μια κοίλη και γνησίως αύξουσα καμπύλη που ξεκινάει από το σημείο $(0, 0)$ και τείνει ασυμπτωτικά στην οριζόντια ευθεία σε ύψος $\frac{1}{n}$. Το γράφημα της $f_{n+1}(x) = \frac{x}{1+(n+1)x}$ είναι κάτω από το γράφημα της $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ και όταν το n μεγαλώνει το γράφημα της f_n χαμηλώνει και τείνει να ταυτιστεί με τον x-άξονα. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν x, τα ύψη $|f_n(x)| = \frac{x}{1+nx}$ μικραίνουν και τείνουν στο 0. Παρατηρήστε ότι το γράφημα της f_n είναι ανάμεσα στον x-άξονα και στην οριζόντια ευθεία σε ύψος $\frac{1}{n}$, οπότε όταν το n μεγαλώνει ολόκληρο το γράφημα της f_n "συμπιέζεται" προς τον x-άξονα.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,1]$ και με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{nx}, & \text{αν } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = x, \ f_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x}, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}, \ \ldots, \ f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{nx}, & \text{αν } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \ \ldots.$$

Αν $x = 0$, τότε έχουμε το όριο

$$f_n(0) = 0 \to 0 \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Αν $x > 0$, τότε από κάποιον δείκτη και πέρα ισχύει

$$\frac{1}{n} \le x \le 1$$

και, επομένως, από κάποιον δείκτη και πέρα ισχύει

$$f_n(x) = \frac{1}{nx},$$

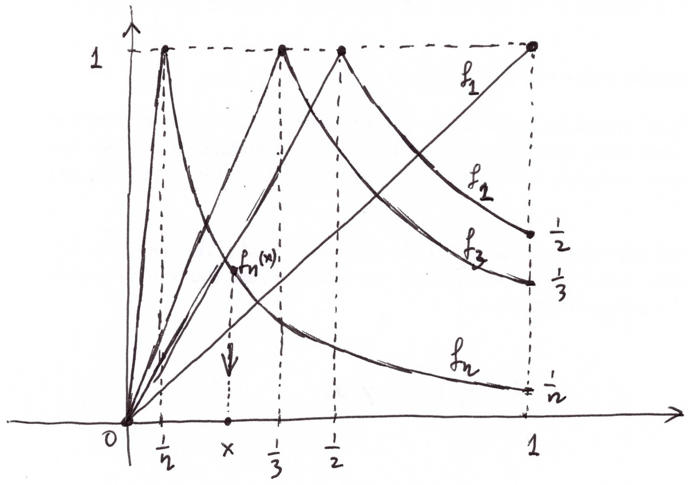
οπότε έχουμε το όριο

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \to 0 \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,1].$$

Το γράφημα καθεμιάς f_n είναι μια συνεχής καμπύλη που αποτελείται από δυο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι ευθύγραμμο από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(\frac{1}{n}, 1)$ και με μεγάλη κλίση n και το δεύτερο μέρος είναι γνησίως φθίνουσα, κυρτή καμπύλη από το σημείο $(\frac{1}{n}, 1)$ μέχρι το σημείο $(1, \frac{1}{n})$. Όταν το n μεγαλώνει, η “κορυφή” του γραφήματος της f_n μετακινείται σε σταθερό ύψος 1 προς τα αριστερά προς το σημείο $(0, 1)$ και το καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n χαμηλώνει προς τον x-άξονα. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα x στο διάστημα $(0, 1]$, τότε από ένα n και πέρα το x περιέχεται πάντοτε στο διάστημα $[\frac{1}{n}, 1]$ (δηλαδή, το σημείο $(x, f_n(x))$ περιέχεται στο καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n) και το ύψος $|f_n(x)| = \frac{1}{nx}$ τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο $+\infty$.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0, 1]$ και με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \begin{cases} 4x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \ \ldots,\ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \ \ldots.$$

Αν $x = 0$, τότε έχουμε το όριο

$$f_n(0) = 0 \to 0 \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

Αν $x > 0$, τότε από κάποιον δείκτη και πέρα ισχύει

$$\frac{1}{n} \leq x \leq 1$$

και, επομένως, από κάποιον δείκτη και πέρα ισχύει

$$f_n(x) = \frac{1}{x},$$

οπότε έχουμε το όριο

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \to \frac{1}{x} \qquad (\text{όταν } n \to +\infty).$$

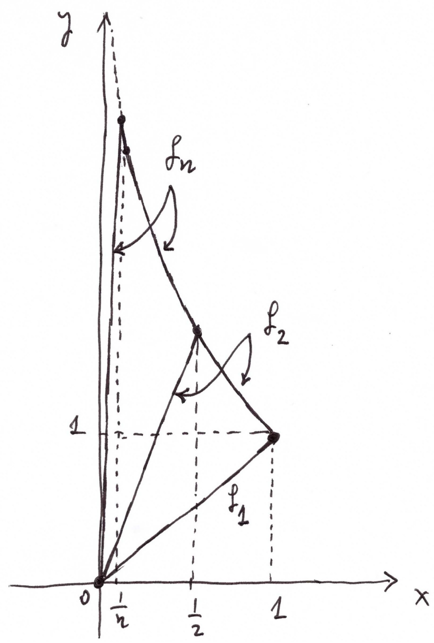
Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } [0, 1],$$

όπου f είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x=0\\ \frac{1}{x}, & \text{αν } 0<x\leq 1\end{cases}$$

Το γράφημα καθεμιάς f_n είναι μια συνεχής καμπύλη που αποτελείται από δυο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι ευθύγραμμο από το σημείο $(0,0)$ μέχρι το σημείο $(\frac{1}{n},n)$ και με μεγάλη κλίση n^2 και το δεύτερο μέρος είναι πάνω στην γνησίως φθίνουσα, κυρτή καμπύλη $y=\frac{1}{x}$ από το σημείο $(\frac{1}{n},n)$ μέχρι το σημείο $(1,1)$. Όταν το n μεγαλώνει, η "κορυφή" του γραφήματος της f_n μετακινείται με αυξανόμενο ύψος n προς τα αριστερά προς τον y-άξονα και το καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n παραμένει πάνω στην καμπύλη $y=\frac{1}{x}$. Όταν σταθεροποιήσουμε ένα x στο διάστημα $(0,1]$, τότε από ένα n και πέρα το x περιέχεται πάντοτε στο διάστημα $[\frac{1}{n},1]$ (δηλαδή, το σημείο $(x,f_n(x))$ περιέχεται στο καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n) και το ύψος $|f_n(x)|=\frac{1}{x}$ μένει σταθερό $\frac{1}{x}$ όταν το n τείνει στο $+\infty$.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τύπο

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Δηλαδή,

$$f_1(x)=\sin x, \quad f_2(x)=\frac{\sin(2x)}{2}, \quad \dots, \quad f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}, \quad \dots .$$

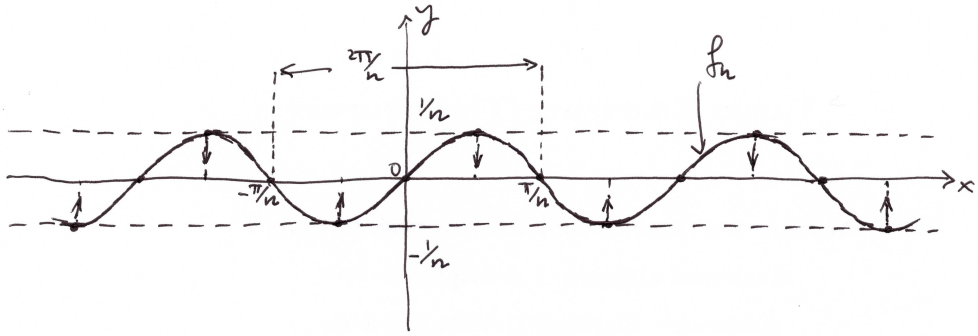
Με τυχόν αλλά σταθερό x, έχουμε το όριο

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n}\to 0 \qquad (\text{όταν } n\to+\infty).$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Το γράφημα καθεμιάς f_n είναι η γνωστή ημιτονοειδής καμπύλη μετά από αλλαγή κλίμακας $\frac{1}{n}$ σε όλες τις κατευθύνσεις: το κατακόρυφο πλάτος από 2 έχει γίνει $\frac{2}{n}$ και το εύρος της περιόδου από 2π έχει γίνει $\frac{2\pi}{n}$. Ολόκληρο το γράφημα της f_n είναι ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες σε ύψη $\pm\frac{1}{n}$ και, επομένως, "συμπιέζεται" ολόκληρο προς τον x-άξονα όταν το n μεγαλώνει.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τύπο

$$f_n(x) = \cos(nx) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Δηλαδή,

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = \cos(nx), \quad \ldots.$$

Αν υπήρχε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$, τότε θα είχαμε

$$f_n(\pi) \to f(\pi)$$

ή, ισοδύναμα,

$$(-1)^n \to f(\pi).$$

Αυτό είναι αδύνατο, διότι η ακολουθία $((-1)^n)$ δεν συγκλίνει, οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμία συνάρτηση κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Το γράφημα καθεμιάς f_n είναι η γνωστή συνημιτονοειδής καμπύλη μετά από αλλαγή κλίμακας $\frac{1}{n}$ μόνο στην οριζόντια κατεύθυνση: το κατακόρυφο πλάτος παραμένει 2 και το εύρος της περιόδου από 2π έχει γίνει $\frac{2\pi}{n}$.