ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Παράδειγμα. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5x + 4$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \;\Leftarrow\; |(5x'+4)-(5x''+4)| < \epsilon \;\Leftarrow\; 5|x'-x''| < \epsilon \;\Leftarrow\; |x'-x''| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Άρα, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{5}$ (για παράδειγμα, το $\delta = \frac{\epsilon}{5}$), τότε

$$|x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |x' - x''| < \frac{\epsilon}{5} \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4.6.1. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0,1) \cup (1,2]$ *αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο* $[0,1) \cup (1,2]$.

Λύση: Η f είναι, προφανώς, συνεχής σε κάθε σημείο του $[0,1) \cup (1,2]$. Πράγματι, για κάθε x στο $[0,1) \cup (1,2]$ η f είναι σταθερή σε κάποιο κατάλληλα μικρό ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x, οπότε είναι συνεχής στο x.
Τώρα, έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1) \cup (1,2]$.
Τότε για $\epsilon = 1$ (Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \leq 1$ για να προκύψει άτοπο στο τέλος.) πρέπει να υπάρχει κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε

$$x', x'' \in [0,1) \cup (1,2], |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < 1.$$

Θεωρούμε τα σημεία

$$x' = 1 - \frac{\delta}{4}, \quad x' = 1 + \frac{\delta}{4}$$

οπότε

$$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

αλλά

$$|f(x') - f(x'')| = |0 - 1| = 1 \geq 1.$$

Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1) \cup (1,2]$.

Άσκηση 4.6.2. *Αποδείξτε ότι η* $|x|$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $\mathbb{R}$*, ότι η* $\sqrt{x}$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $[0, +\infty)$ *και ότι η* $\frac{1}{x}$ *δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $(0, +\infty)$.

Λύση: (i) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$||x'| - |x''|| \leq |x' - x''|.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \epsilon$ και τότε

$$|x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |x' - x''| < \epsilon \;\Rightarrow\; ||x'| - |x''|| < \epsilon.$$

Άρα η $|x|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ii) Για $x', x'' \geq 0$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| \leq \sqrt{|x' - x''|},$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα υψώνοντας και τις δυο μεριές της στο τετράγωνο.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε για $x', x'' \geq 0$ έχουμε

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \epsilon \;\Leftarrow\; \sqrt{|x' - x''|} < \epsilon \;\Leftarrow\; |x' - x''| < \epsilon^2.$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \epsilon^2$ και τότε για $x', x'' \geq 0$ έχουμε

$$|x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |x' - x''| < \epsilon^2 \;\Rightarrow\; \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \epsilon.$$

Άρα η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(iii) Έστω ότι η $\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.
Τότε για $\epsilon = 1$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x', x'' > 0, |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| < 1.$$

Παίρνουμε $x' = x > 0$ και $x'' = x + \frac{\delta}{2} > 0$ και έχουμε

$$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Άρα πρέπει να ισχύει

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| < 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\delta}{x(2x + \delta)} < 1.$$

Αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε $x > 0$, αλλά αυτό είναι αδύνατο, διότι

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\delta}{x(2x + \delta)} = +\infty,$$

οπότε υπάρχει $x > 0$ αρκετά κοντά στο 0 ώστε να είναι $\frac{\delta}{x(2x+\delta)} \geq 1$.
Άρα η $\frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 4.6.7. *Έστω δυο γειτονικά διαστήματα I_1, I_2 με κοινό άκρο το οποίο ανήκει και στα δυο διαστήματα και $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο I_1 και στο I_2. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $I_1 \cup I_2$.*

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I_1, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$$x', x'' \in I_1, |x' - x''| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1}$$

Ομοίως, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I_2, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε

$$x', x'' \in I_2, |x' - x''| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Τώρα, θεωρούμε το

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0,$$

οπότε

$$\delta \le \delta_1, \quad \delta \le \delta_2.$$

Και τώρα έστω δυο οποιαδήποτε x', x'' στο $I_1 \cup I_2$ με $|x' - x''| < \delta$.
Έχουμε τρεις περιπτώσεις για τις θέσεις των x', x''.
Αν τα x', x'' ανήκουν και τα δυο στο I_1, τότε από την (1) και από την $\delta \le \delta_1$ συνεπάγεται

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Αν τα x', x'' ανήκουν και τα δυο στο I_2, τότε από την (2) και από την $\delta \le \delta_2$ συνεπάγεται

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Τέλος, έστω ότι ένα από τα x', x'' ανήκει στο I_1 και το άλλο ανήκει στο I_2. Για παράδειγμα, έστω $x' \in I_1$, $x'' \in I_2$. Έστω x_0 το κοινό άκρο των I_1, I_2. Τότε το x_0 είναι ανάμεσα στα x', x'', οπότε, επειδή $|x' - x''| < \delta$, είναι $|x' - x_0| < \delta$ και $|x'' - x_0| < \delta$ και από τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται

$$|f(x') - f(x'')| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση,

$$x', x'' \in I_1 \cup I_2, |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $I_1 \cup I_2$.

Άσκηση 5.3.20. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I και ότι ισχύει $|f'(x)| \le M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

Λύση: Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής συνεπάγεται ότι για κάθε $x', x'' \in I$ με $x' \neq x''$ ισχύει

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f(\xi)$$

για κάποιο ξ ανάμεσα στα x', x'' και, επομένως, εσωτερικό σημείο του I.
Άρα για κάθε $x', x'' \in I$ με $x' \neq x''$ ισχύει

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| \le M$$

και άρα

$$|f(x') - f(x'')| \le M|x' - x''|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει και για $x' = x'' \in I$.
Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \;\Leftarrow\; M|x' - x''| < \epsilon \;\Leftarrow\; |x' - x''| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Άρα, αν επιλέξουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{M}$, τότε

$$x', x'' \in I, |x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |x' - x''| < \frac{\epsilon}{M} \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Τα συμπεράσματα των ασκήσεων 4.6.7 και 5.3.20 είναι πολύ χρήσιμα και μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε ως θεωρία για την λύση άλλων ασκήσεων.