ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.
Τότε υπάρχει κάποιο $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in [a,b]$ τέτοια ώστε να ισχύει $|x' - x''| < \delta$ και $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon$.
Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν

$$x_n{}', x_n{}'' \in [a,b] \text{ με } |x_n{}' - x_n{}''| < \frac{1}{n} \text{ και } |f(x_n{}') - f(x_n{}'')| \geq \epsilon.$$

Έτσι δημιουργούνται δυο ακολουθίες στο $[a,b]$, οι $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$.
Η ακολουθία $(x_n{}')$ είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, έχει μια τουλάχιστον συγκλίνουσα υποακολουθία. Έστω

$$x_{n_k}{}' \to \xi,$$

οπότε $\xi \in [a,b]$.
Επειδή ισχύει

$$|x_{n_k}{}' - x_{n_k}{}''| < \frac{1}{n_k} \to 0,$$

συνεπάγεται

$$x_{n_k}{}' - x_{n_k}{}'' \to 0.$$

Άρα από το $x_{n_k}{}' \to \xi$ προκύπτει

$$x_{n_k}{}'' \to \xi.$$

Επειδή $\xi \in [a,b]$, η f είναι συνεχής στο ξ. Άρα από τα $x_{n_k}{}' \to \xi$ και $x_{n_k}{}'' \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}{}') \to f(\xi) \text{ και } f(x_{n_k}{}'') \to f(\xi)$$

και, επομένως,

$$f(x_{n_k}{}') - f(x_{n_k}{}'') \to 0.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι ισχύει

$$|f(x_{n_k}{}') - f(x_{n_k}{}'')| \geq \epsilon > 0 \qquad \text{για κάθε } k.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. □

Άσκηση 4.6.2. *Αποδείξτε ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.*

Λύση: Η παράγωγος της $f(x) = \sqrt{x}$ στο $(0,+\infty)$ είναι η

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Αν η f' ήταν φραγμένη στο $(0,+\infty)$, τότε από την άσκηση 5.3.20 θα συμπεραίναμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Όμως, η f' δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty.$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι, αν περιοριστούμε σε ένα διάστημα “μακριά” από το 0, τότε η f' θα είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα η f' είναι φραγμένη στο $(1, +\infty)$ αφού ισχύει

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

Αυτό μας εξασφαλίζει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1, +\infty)$.
Από την άλλη μεριά, το προηγούμενο Θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο $[0, 1]$ αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
Και, τώρα, σύμφωνα με την άσκηση 4.6.7, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1] \cup [1, +\infty) = [0, +\infty)$.
Η λύση που δώσαμε είναι προτιμότερη από την λύση που δώσαμε στο περασμένο μάθημα. Ο λόγος είναι ότι στην προηγούμενη λύση χρησιμοποιήσαμε μια ανισότητα η οποία δεν είναι αρκετά γνωστή και πιθανόν να μην την θυμόμαστε καθε στιγμή. Επίσης, η ανισότητα εκείνη εφαρμόζεται μόνο στην συγκεκριμένη συνάρτηση. Η τωρινή λύση, όμως, είναι πιο μεθοδική και βασίζεται σε πιο γενικά αποτελέσματα τα οποία μπορούμε να θυμόμαστε πιο εύκολα και τα οποία εφαρμόζονται σε περισσότερες περιπτώσεις.

Και τώρα ξαναγυρνάμε στην θεωρία του ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b - a}. \tag{1}$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα υποδιαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή, ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } k = 1, \ldots, n.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1}, x_k]$, υπάρχουν $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k) \qquad \text{για κάθε } x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Άρα

$$l_k = f(\zeta_k), \quad u_k = f(\eta_k).$$

Επίσης, επειδή

$$|\eta_k - \zeta_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta,$$

από την (1) συνεπάγεται

$$u_k - l_k = f(\eta_k) - f(\zeta_k) < \frac{\epsilon}{b - a}$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

Τώρα θα αναφερθούμε στις διάφορες ιδιότητες του ολοκληρώματος. Οι τεχνικές που χρειάζονται για τις αποδείξεις των ιδιοτήτων είναι αρκετά περίπλοκες και, επειδή είναι παρόμοιες μεταξύ τους, στο μάθημα θα αποδείξουμε μόνο μία (ή δύο) από αυτές.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f, g ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες στο $[a, b]$. Δηλαδή, ισχύει $|f(x)| \le M'$ και $|g(x)| \le M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει $|f(x) + g(x)| \le M' + M''$ για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, η $f + g$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Αυτή είναι η πρώτη προϋπόθεση για να είναι η $f + g$ ολοκληρώσιμη.
Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Αντικαθιστούμε τις Δ', Δ'' με την $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, η οποία είναι λεπτότερη και από τις δυο διαμερίσεις, οπότε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Τώρα, έστω ότι η Δ είναι η

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}.$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και $u_k{}''$ και $l_k{}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες για την g και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $f + g$.
Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$l_k{}' \le f(x) \le u_k{}', \qquad l_k{}'' \le g(x) \le u_k{}''$$

και, επομένως,

$$l_k{}' + l_k{}'' \le f(x) + g(x) \le u_k{}' + u_k{}''.$$

Άρα το $l_k{}' + l_k{}''$ είναι κάτω φράγμα και το $u_k{}' + u_k{}''$ είναι άνω φράγμα της $f + g$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ και άρα

$$l_k{}' + l_k{}'' \le l_k \le u_k \le u_k{}' + u_k{}''.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $x_k - x_{k-1}$ και προσθέτοντας τις ανισότητες, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f+g; a, b; \Delta) &= \sum_{k=1}^{n} u_k (x_k - x_{k-1}) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} u_k{}' (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} u_k{}'' (x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \end{aligned} \tag{3}$$

και, ομοίως,

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) &= \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} l_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} l_k{}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta).\end{aligned} \tag{4}$$

Αφαιρώντας τις (3) και (4) και χρησιμοποιώντας και τις ανισότητες στην (2), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) &\leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \\ \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) &\leq \int_a^b g \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b (f+g) \leq \overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta). \tag{6}$$

Από τις (3), (4), (6) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b (f+g) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \tag{7}$$

και από τις ανισότητες (5) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta). \tag{8}$$

Τέλος, από τις (7), (8) και την (2) έχουμε

$$\Big| \int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \Big| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, είναι $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\square$