ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Τώρα θα μας απασχολήσουν τρία ερωτήματα σε σχέση με την κατά σημείο σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων. Και για τα τρία ερωτήματα θα υποθέσουμε ότι

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } A.$$

Ερώτημα 1: *Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς σε κάποιο $\xi \in A$, είναι τότε και η f συνεχής στο ξ;*

Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Είδαμε, για παράδειγμα, ότι οι συναρτήσεις με τύπο

$$f_n(x) = x^n$$

συγκλίνουν στην f κατά σημείο στο $[0,1]$, όπου η f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Εδώ, κάθε f_n είναι συνεχής στο 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στο 1.

Ερώτημα 2: *Στην περίπτωση που $A = [a,b]$, αν όλες οι f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, είναι τότε και η f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και μήπως*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f\ ;$$

Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Για παράδειγμα, είδαμε ότι οι συναρτήσεις f_n με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

συγκλίνουν στην f κατά σημείο στο $[0,1]$, όπου η f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ (διότι είναι συνεχής στο $[0,1]$) αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αφού δεν είναι καν φραγμένη στο $[0,1]$.
Μάλιστα, για τα ολοκληρώματα των f_n έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} f_n + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2} + \log n \to +\infty. \end{aligned}$$

Ερώτημα 3: *Αν όλες οι f_n είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο $\xi \in A$, είναι τότε και η f παραγωγίσιμη στο ξ και μήπως ισχύει $f_n'(\xi) \to f'(\xi)$;*

Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Είδαμε, για παράδειγμα, ότι οι συναρτήσεις με τύπο

$$f_n(x) = x^n$$

συγκλίνουν στην f κατά σημείο στο $[0,1]$, όπου η f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Κάθε f_n είναι παραγωγίσμη στο 1 αλλά η f δεν είναι παραγωγίσμη στο 1.
Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι συναρτήσεις με τύπο

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Αποδείξαμε ότι οι f_n συγκλίνουν στην σταθερή συνάρτηση 0 κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Όλες οι f_n είναι παραγωγίσμες στο π και η 0 είναι παραγωγίσιμη στο π, αλλά δεν ισχύει $f_n'(\pi) \to 0$, αφού

$$f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Επειδή τα προηγούμενα τρία ερωτήματα είναι πολύ βασικά για την Ανάλυση, θα μελετήσουμε ένα άλλο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, έτσι ώστε να έχουμε ικανοποιητικότερες απαντήσεις στα τρία αυτά ερωτήματα.

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο ίδιο σύνολο A και με πραγματικές τιμές. Ορίζουμε ένα είδος "απόστασης" ανάμεσα στις f, g, η οποία ονομάζεται **ομοιόμορφη απόσταση** των f, g στο A, με τον τύπο

$$\|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

Το σύνολο $\{|f(x) - g(x)| \,|\, x \in A\}$ είναι μη-κενό (διότι το A είναι μη-κενό). Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, τότε η $\|f-g\|_A$ είναι αριθμός, ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\|f-g\|_A = +\infty$. Επίσης, είναι $\|f-g\|_A \ge 0$ αφού ισχύει $|f(x)-g(x)| \ge 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα

$$0 \le \|f - g\|_A \le +\infty.$$

Ειδική περίπτωση: αν η g είναι η μηδενική συνάρτηση 0, τότε:

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in A\}.$$

Το να είναι

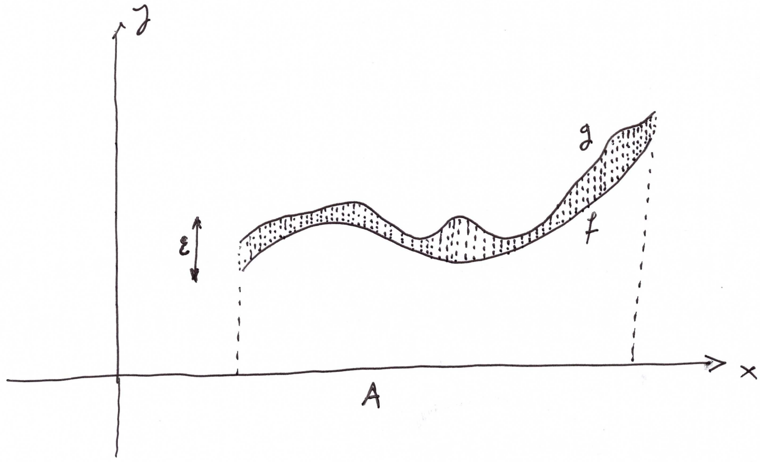
$$\|f - g\|_A \le \epsilon$$

ισοδυναμεί με το να ισχύει

$$|f(x) - g(x)| \le \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Πράγματι, το να ισχύει $|f(x)-g(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$ ισοδυναμεί με το ότι το ϵ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{|f(x) - g(x)| \,|\, x \in A\}$ και από την άλλη μεριά το $\|f-g\|_A$ είναι, εξ ορισμού, το *ελάχιστο* άνω φράγμα του ίδιου συνόλου.

Επομένως, το να είναι $\|f-g\|_A \le \epsilon$ σημαίνει ότι όλα τα κατακόρυφα ύψη ανάμεσα στα γραφήματα των f, g είναι $\le \epsilon$. Με άλλα λόγια, το να είναι $\|f-g\|_A \le \epsilon$ σημαίνει ότι *τα γραφήματα των f, g έχουν κατακόρυφη απόσταση $\le \epsilon$* **ομοιόμορφα** *σε ολόκληρο το σύνολο A.*



ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω συναρτήσεις f, g ορισμένες στο A και αριθμός λ. Τότε:*

(i) $\|f\|_A = 0$ *αν και μόνο αν ισχύει* $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in A$.

(ii) $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.

(iii) $\|\lambda f\|_A = |\lambda| \|f\|_A$.

(iv) $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$.

Απόδειξη. (i) Έστω $|f(x)| = 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε

$$\{f(x) \,|\, x \in A\} = \{0\},$$

οπότε

$$\|f\|_A = \sup\{0\} = 0.$$

Αντιστρόφως, έστω $\|f\|_A = 0$, δηλαδή

$$\sup\{|f(x)| \,|\, x \in A\} = 0.$$

Τότε ισχύει

$$|f(x)| \leq 0$$

και, επομένως, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Επειδή

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in A\}, \qquad \|g\|_A = \sup\{|g(x)| \,|\, x \in A\},$$

συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq \|f\|_A, \quad |g(x)| \leq \|g\|_A \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Άρα ισχύει

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_A + \|g\|_A \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Άρα το $\|f\|_A + \|g\|_A$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{|f(x) + g(x)| \,|\, x \in A\}$, οπότε

$$\|f + g\|_A = \sup\{|f(x) + g(x)| \,|\, x \in A\} \leq \|f\|_A + \|g\|_A.$$

Ομοίως αποδεικνύονται και τα (iii), (iv). □

Απλά πορίσματα των (i) και (ii) της προηγούμενης Πρότασης είναι τα:

$$\|f-g\|_A = 0 \text{ αν και μόνο αν οι } f, g \text{ ταυτίζονται στο } A.$$

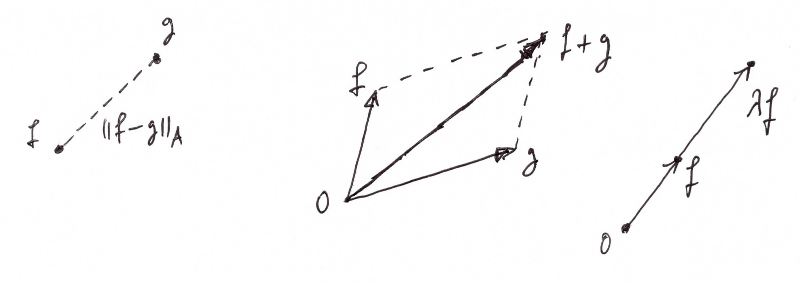
$$\|f-g\|_A \le \|f-h\|_A + \|h-g\|_A.$$

Το τελευταίο αποδεικνύεται με τον γνωστό τρόπο:

$$\|f-g\|_A = \|(f-h)+(h-g)\|_A \le \|f-h\|_A + \|h-g\|_A.$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι έχουμε αρχίσει να βλέπουμε τις συναρτήσεις με έναν διαφορετικό τρόπο. Όπως τα σημεία μιας ευθείας ή τα σημεία ενός επιπέδου ή τα σημεία του τρισδιάστατου χώρου, βλέπουμε και τις συναρτήσεις σαν "σημεία" ενός "χώρου". Κάθε συνάρτηση είναι ένα "σημείο" και δυο συναρτήσεις είναι δυο "σημεία" με κάποια μετρήσιμη "απόσταση" ανάμεσά τους ακριβώς όπως δυο σημεία στην ευθεία ή στο επίπεδο ή στον χώρο έχουν μια μετρήσιμη απόσταση (την Ευκλείδεια απόσταση) ανάμεσά τους.

Όπως σε κάθε σημείο αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα με τέλος το σημείο και αρχή το μηδενικό σημείο, έτσι και σε κάθε συνάρτηση αντιστοιχίζουμε το "διάνυσμα" με τέλος την συνάρτηση και αρχή την μηδενική συνάρτηση. Τώρα, τα (i), (ii), (iii) της τελευταίας Πρότασης είναι ανάλογα αντίστοιχων ιδιοτήτων της Ευκλείδειας απόστασης σημείων της ευθείας ή του επιπέδου ή του χώρου: (i) το μήκος ενός διανύσματος είναι 0 αν και μόνο αν το διάνυσμα είναι το μηδενικό διάνυσμα (και, γενικότερα, η απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία είναι 0 αν και μόνο αν τα δυο σημεία ταυτίζονται), (ii) το μήκος του αθροίσματος δυο διανυσμάτων είναι μικρότερο ή ίσο του αθροίσματος των μηκών των δυο διανυσμάτων (ή, αλλιώς, η απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία είναι μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των αποστάσεων των δυο σημείων από ένα τρίτο σημείο) και (iii) το μήκος ενός διανύσματος πολλαπλασιασμένου με έναν αριθμό είναι ίσο με το μήκος του διανύσματος πολλαπλασιασμένο με την απόλυτη τιμή του αριθμού.



ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ακολουθία συναρτήσεων (f_n) και συνάρτηση f, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο ίδιο σύνολο A. Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει** *στην f* **ομοιόμορφα** *στο A και συμβολίζουμε*

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f \quad \textit{στο } A \qquad \textit{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \textit{στο } A$$

αν $\|f_n - f\|_A \to 0$. Με άλλα λόγια, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \ge n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \|f_n - f\|_A \le \epsilon.$$

Η ανισότητα $\|f_n - f\|_A \le \epsilon$ ισοδυναμεί με την $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in A\} \le \epsilon$ και αυτή ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$. Άρα ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται και ως εξής: $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \ge n_0 \qquad \Rightarrow \qquad |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, τότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι για τυχόν $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ όταν $n \to +\infty$.
Έστω $x \in A$. Τότε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_A \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Άρα $f_n(x) \to f(x)$. □

Βάσει της τελευταίας Πρότασης, μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει, αν συγκλίνει, μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε, λοιπόν, για κάθε $x \in A$ το όριο, αν αυτό υπάρχει και είναι αριθμός, της $(f_n(x))$, ονομάζουμε αυτό το όριο $f(x)$ και δημιουργούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Απομένει να εξετάσουμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπολογίζοντας την $\|f_n - f\|_A$ για κάθε n.

Παρατηρήστε μια ουσιαστική διαφορά της ομοιόμορφης σύγκλισης από την κατά σημείο σύγκλιση. Στην κατά σημείο σύγκλιση $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A σταθεροποιούμε ένα τυχόν $x \in A$ και βλέπουμε αν $f_n(x) \to f(x)$ όταν $n \to +\infty$. Στην ομοιόμορφη σύγκλιση $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A *δεν* σταθεροποιούμε το $x \in A$. Πριν αφήσουμε το n να τείνει στο $+\infty$, μεταβάλλουμε το x στο A έτσι ώστε να βρούμε το supremum των απόλυτων διαφορών $|f_n(x) - f(x)|$, και αφού βρούμε αυτό το supremum, δηλαδή το $\|f_n - f\|_A$, τότε μόνο βλέπουμε αν $\|f_n - f\|_A \to 0$ όταν $n \to +\infty$.

Θα εξετάσουμε από τη σκοπιά της ομοιόμορφης σύγκλισης τα παραδείγματα ακολουθιών συναρτήσεων που έχουμε δεί.

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad \text{για κάθε } x.$$

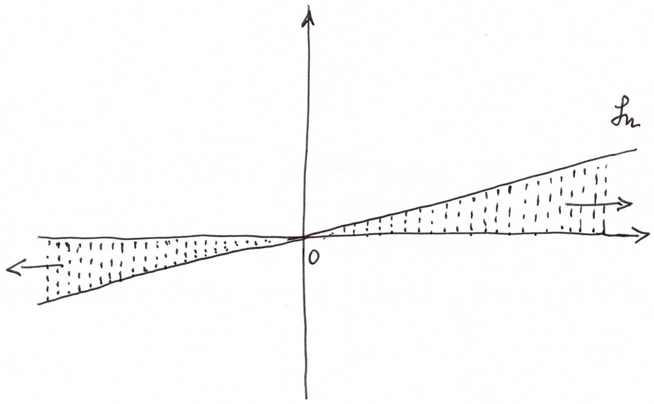
Γνωρίζουμε ότι

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Αν η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση f ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε πρέπει να συγκλίνει στην f και κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Επειδή, όμως, η (f_n) συγκλίνει στην σταθερή 0 κατά σημείο στο $\mathbb{R}$, πρέπει η f να ταυτίζεται με την σταθερή 0 στο $\mathbb{R}$. Άρα το ερώτημα είναι αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
Τώρα, για κάθε n έχουμε

$$\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = \|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\{|f_n(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\frac{|x|}{n} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \sup[0, +\infty) = +\infty.$$

Άρα δεν ισχύει $\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} \to 0$, οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.



Δείτε στο γράφημα ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $\mathbb{R}$, το supremum των $|f_n(x)-0|$ είναι $+\infty$ και αυτό το supremum "προσεγγίζεται" όταν το x απομακρύνεται είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά.

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $(1,+\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \qquad \text{για κάθε } x > 1.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } (1,+\infty).$$

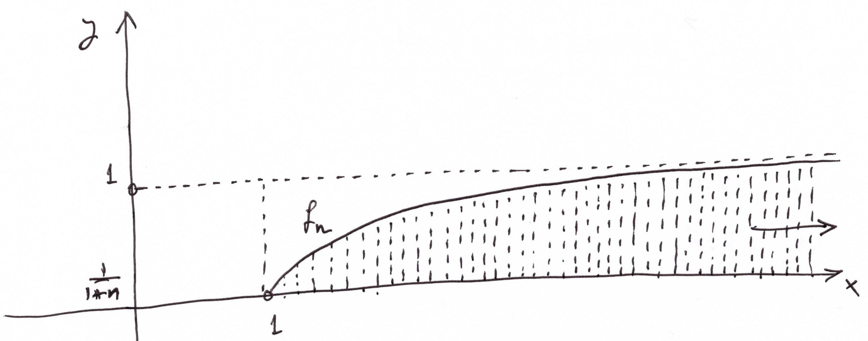
Άρα μένει να δούμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.
Τώρα,

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{(1,+\infty)} &= \sup\{|f_n(x)| \mid x \in (1,+\infty)\} = \sup\left\{\frac{x}{x+n} \,\middle|\, x \in (1,+\infty)\right\} \\ &= \sup\left(\frac{1}{1+n}, 1\right) = 1.\end{aligned}$$

Η ισότητα $\{\frac{x}{x+n} \mid x \in (1,+\infty)\} = (\frac{1}{1+n}, 1)$ προκύπτει από το ότι η $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$.
Άρα

$$\|f_n\|_{(1,+\infty)} \to 1,$$

οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $(1,+\infty)$.



Στο γράφημα φαίνεται ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $(1,+\infty)$, το supremum των $|f_n(x)-0|$ είναι 1 και αυτό το supremum "προσεγγίζεται" όταν το x απομακρύνεται προς τα δεξιά.

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,1]$ και με τύπο

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

Γνωρίζουμε ότι

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } [0,1],$$

όπου f είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Θα δούμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$.
Έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & \text{αν } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \{0\} \cup \{x^n \mid x \in [0,1)\} = \{0\} \cup [0,1) = [0,1),$$

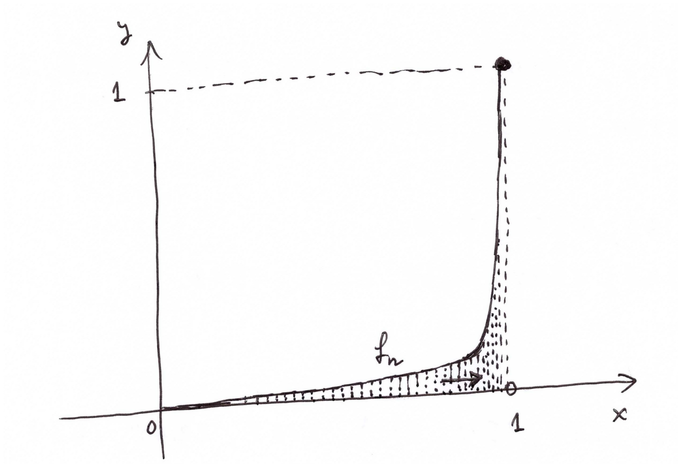
οπότε

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} = \sup[0,1) = 1$$

για κάθε n.
Επομένως,

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} \to 1,$$

οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$.



Δείτε στο γράφημα ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $[0,1]$, το supremum των $|f_n(x) - f(x)|$ είναι 1 και αυτό το supremum "προσεγγίζεται" όταν το x πλησιάζει το 1 από τα αριστερά (αλλά όχι όταν $x=1$).