ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω τελείως γενικό σύνολο M και μια συλλογή συνόλων Σ. Λέμε ότι η συλλογή Σ* **καλύπτει** *το M ή αποτελεί* **κάλυψη** *του M αν η ένωση των συνόλων της συλλογής Σ περιέχει το M, δηλαδή*

$$M \subseteq \bigcup_{A \in \Sigma} A.$$

Αν το πλήθος των συνόλων της συλλογής Σ, η οποία είναι κάλυψη του M, είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι η Σ είναι **πεπερασμένη κάλυψη** *του M.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν έχουμε δυο συλλογές συνόλων Σ και Σ' και είναι και οι δύο καλύψεις του M και αν $\Sigma \subseteq \Sigma'$, τότε λέμε ότι η Σ είναι* **μικρότερη ή ίση** *της Σ'. Το $\Sigma \subseteq \Sigma'$ σημαίνει ότι η Σ' περιέχει κάθε σύνολο το οποίο περιέχει και η Σ και πιθανόν και μερικά επιπλέον σύνολα.*

Από το ότι η Σ καλύπτει το σύνολο M και από το ότι η Σ είναι μικρότερη ή ίση της Σ' συνεπάγεται ότι και η Σ' καλύπτει το M.
Πράγματι, κάθε $x \in M$ περιέχεται σε κάποιο σύνολο A από τα σύνολα που ανήκουν στην συλλογή Σ. Αυτό, όμως, το A ανήκει και στην συλλογή Σ' (αφού η Σ' είναι μεγαλύτερη συλλογή). Άρα κάθε $x \in M$ περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα της συλλογής Σ' και άρα η Σ' καλύπτει το M.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και Σ μια συλλογή ανοικτών υποσυνόλων του X. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Αν η Σ είναι κάλυψη του συνόλου M τότε λέμε ότι η Σ είναι* **ανοικτή κάλυψη** *του M.*

Και φτάνουμε στον βασικό ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Λέμε ότι το M είναι* **συμπαγές** *αν για κάθε ανοικτή κάλυψη Σ του M υπάρχει κάποια πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ.*

Τί σημαίνει ότι το M είναι συμπαγές;
Σημαίνει ότι: *αν έχουμε μια οποιαδήποτε συλλογή Σ που αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M (δηλαδή τα σύνολα της συλλογής Σ είναι όλα ανοικτά και το M περιέχεται στην ένωσή τους), πρέπει να μπορούμε να βρούμε μια συλλογή Σ' που είναι κι αυτή ανοικτή κάλυψη του M και τα σύνολα που την αποτελούν πρέπει να ανήκουν στην συλλογή Σ και να έχουν πεπερασμένο πλήθος.*
Τα σύνολα της Σ' πρέπει να επιλεγούν από τα σύνολα της Σ: φτιάχνουμε την Σ' παίρνοντας κάποια από τα σύνολα της Σ (αγνοώντας τα υπόλοιπα σύνολα της Σ) με τέτοιο τρόπο ώστε τα σύνολα που θα επιλέξουμε να είναι πεπερασμένου πλήθους και να καλύπτουν το M.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική και $M = (0, 1)$.
(α) Παίρνουμε την συλλογή Σ που αποτελείται από τα εξής σύνολα:

$$A_x = \Big(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Τα σύνολα A_x είναι όλα ανοικτά σύνολα και καλύπτουν όλο το $\mathbb{R}$ και, επομένως, καλύπτουν το M. Δηλαδή η Σ αποτελεί μια (άπειρη) ανοικτή κάλυψη του M.
Τώρα από όλα τα σύνολα A_x επιλέγουμε τα σύνολα

$$A_{\frac{1}{3}} = \Big(0, \frac{2}{3}\Big), \quad A_{\frac{2}{3}} = \Big(\frac{1}{3}, 1\Big).$$

Αυτά τα δύο σύνολα σχηματίζουν μια συλλογή Σ' η οποία αποτελεί πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ.
(β) Με το ίδιο $M = (0, 1)$ θεωρούμε τη συλλογή Σ που αποτελείται από τα σύνολα

$$A_n = \Big(\frac{1}{n+1}, 1\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή:

$$A_1 = \Big(\frac{1}{2}, 1\Big), \quad A_2 = \Big(\frac{1}{3}, 1\Big), \quad A_3 = \Big(\frac{1}{4}, 1\Big), \quad \ldots\ldots \quad .$$

Τα σύνολα A_n είναι όλα ανοικτά και καλύπτουν το M.
Πράγματι, για κάθε $x \in M = (0, 1)$ υπάρχει, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα, κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 < \frac{1}{n} < x < 1$$

οπότε $x \in A_n$.
Τώρα ας θεωρήσουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους σύνολα $A_{n_1}, \ldots, A_{n_N}$ από τα A_n, δηλαδή τα διαστήματα

$$\Big(\frac{1}{n_1}, 1\Big), \ \ldots\ , \Big(\frac{1}{n_N}, 1\Big).$$

Έστω

$$k = \max\{n_1, \ldots, n_N\}.$$

Τότε το $A_k = (\frac{1}{k}, 1)$ είναι το μεγαλύτερο από τα $A_{n_1}, \ldots, A_{n_N}$, οπότε

$$A_{n_1} \cup \cdots \cup A_{n_N} = A_k$$

και άρα

$$M \not\subseteq A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_N}.$$

Δηλαδή για την συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του M *δεν* υπάρχει καμία πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη Σ' του M που να είναι μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα το $M = (0, 1)$ δεν είναι συμπαγές.

Παράδειγμα. Αυτό είναι ένα κάπως γενικό παράδειγμα.
Έστω μετρικός χώρος (X, d) και πεπερασμένο σύνολο $M \subseteq X$. Δηλαδή, έστω

$$M = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

όπου $x_1, \ldots, x_n \in X$.
Θα δούμε ότι το M είναι συμπαγές.
Θεωρούμε τυχαία ανοικτή κάλυψη Σ του M. Κάθε x_j ανήκει σε κάποιο σύνολο της συλλογής Σ. Δηλαδή για κάθε $j = 1, \ldots, n$ υπάρχει κάποιο $A_j \in \Sigma$ ώστε $x_j \in A_j$.
Τότε η συλλογή

$$\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$$

είναι μικρότερη ή ίση της Σ (αφού κάθε A_j είναι σύνολο της συλλογής Σ), είναι πεπερασμένη και αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M (αφού κάθε x_j ανήκει σε κάποιο από τα σύνολα της Σ', στο αντίστοιχο A_j).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Λέμε ότι το M είναι* **φραγμένο** *αν υπάρχει $x_0 \in X$ και $R > 0$ ώστε $M \subseteq N_{x_0}(R)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το M είναι συμπαγές.
Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και θεωρούμε τη συλλογή Σ η οποία αποτελείται από τα σύνολα

$$A_n = N_{x_0}(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε A_n της συλλογής Σ είναι ανοικτό σύνολο και είναι εύκολο να δούμε ότι τα σύνολα A_n καλύπτουν ολόκληρο το X και, επομένως, το M.
Πράγματι, έστω τυχαίο $x \in X$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n > d(x, x_0)$$

οπότε

$$x \in N_{x_0}(n) = A_n.$$

Άρα η συλλογή Σ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M.
Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια ανοικτή κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ και πεπερασμένη. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε τα σύνολα $A_{n_1}, \ldots, A_{n_N}$ της συλλογής Σ να καλύπτουν το M:

$$M \subseteq A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_N} = N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N).$$

Τώρα έστω

$$k = \max\{n_1, \ldots, n_N\}.$$

Τότε η περιοχή $N_{x_0}(k)$ είναι η μεγαλύτερη από τις $N_{x_0}(n_1), \ldots, N_{x_0}(n_N)$ και άρα

$$N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N) = N_{x_0}(k),$$

οπότε

$$M \subseteq N_{x_0}(k).$$

Άρα το M είναι φραγμένο.
Τώρα έστω (για άτοπο) ότι το M δεν είναι κλειστό. Δηλαδή υπάρχει κάποιο x_0 το οποίο είναι οριακό σημείο του M και δεν ανήκει στο M.
Θεωρούμε τη συλλογή Σ η οποία αποτελείται από τα σύνολα

$$A_n = \left\{x \in X \,\middle|\, d(x, x_0) > \frac{1}{n}\right\} = X \setminus \overline{N}_{x_0}\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Κάθε A_n της συλλογής Σ είναι ανοικτό σύνολο και είναι εύκολο να δούμε ότι τα σύνολα A_n καλύπτουν ολόκληρο το $X \setminus \{x_0\}$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = X \setminus \{x_0\}.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in X \setminus \{x_0\}$ έχουμε ότι $x \neq x_0$, οπότε $d(x, x_0) > 0$ και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < d(x, x_0)$ και άρα $x \in A_n$.
Επειδή $x_0 \notin M$, συνεπάγεται

$$M \subseteq X \setminus \{x_0\}$$

και άρα

$$M \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Άρα η συλλογή Σ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M.
Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια ανοικτή κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ και πεπερασμένη. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε τα σύνολα $A_{n_1}, \ldots, A_{n_N}$ της συλλογής Σ να καλύπτουν το M:

$$M \subseteq A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_N} = N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N).$$

Τώρα έστω

$$k = \max\{n_1, \ldots, n_N\}.$$

Τότε το A_k είναι το μεγαλύτερο από τα $A_{n_1}, \ldots, A_{n_N}$ και άρα

$$A_{n_1} \cup \cdots \cup A_{n_N} = A_k,$$

οπότε

$$M \subseteq A_k.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$M \subseteq X \setminus \overline{N}_{x_0}\left(\frac{1}{k}\right)$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\overline{N}_{x_0}\left(\frac{1}{k}\right) \cap M = \emptyset.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι το x_0 είναι οριακό σημείο του M, οπότε η περιοχή $\overline{N}_{x_0}(\frac{1}{k})$ πρέπει να τέμνει το M.
Άρα το M είναι κλειστό. $\square$