ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 10.1.4. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε τα σημεία ελαχίστου και μεγίστου της s καθώς και τα $\lim_{x\to\pm\infty} s(x)$.

Λύση: Για κάθε x η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ συγκλίνει: είναι σειρά μη-αρνητικών όρων και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Θέτουμε

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \qquad \text{για κάθε } x$$

και έτσι ορίζεται η συνάρτηση s στο $\mathbb{R}$ και η σειρά (συναρτήσεων) συγκλίνει στην s κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση χρησιμοποιούμε το Κριτήριο του Weierstrass και έχουμε

$$\Big|\frac{1}{n^2 + x^2}\Big| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x$$

(το $\frac{1}{n^2}$ είναι η μέγιστη τιμή και άρα το ελάχιστο άνω φράγμα της συνάρτησης $\frac{1}{n^2+x^2}$ στο $\mathbb{R}$) και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{1}{n^2+x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι και η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Τώρα θεωρούμε την σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Για κάθε x η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2|x|}{(n^2 + x^2)^2} \leq 2|x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty.$$

Θέτουμε

$$t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x,$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση t στο $\mathbb{R}$ και η σειρά (των παραγώγων συναρτήσεων) συγκλίνει στην t κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Εφαρμόζουμε πάλι το Κριτήριο του Weierstrass και έχουμε

$$\Big|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\Big| = \frac{2|x|}{(n^2+x^2)(n^2+x^2)} \leq \frac{2|x|}{(n^2+x^2)2n|x|} \leq \frac{1}{n^3} \qquad \text{για κάθε } x$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε την απλή ανισότητα $n^2 + x^2 \geq 2n|x|$. Επειδή υπάρχει περίπτωση να μην "δει" κάποιος αυτήν την ανισότητα, υπάρχει και ο "απ' ευθείας" τρόπος να βρούμε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\Big|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\Big| = \frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2}$ στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα (επειδή η συνάρτηση είναι άρτια), της $\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$ στο $[0,+\infty)$. Γι αυτό παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\Big(\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}\Big)' = \frac{2(n^2+x^2)^2 - 8x^2(n^2+x^2)}{(n^2+x^2)^4} = \frac{2n^2-6x^2}{(n^2+x^2)^3},$$

οπότε η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή στο $\frac{n}{\sqrt{3}}$. Αυτή η μέγιστη τιμή είναι ίση με

$$\frac{2\frac{n}{\sqrt{3}}}{(n^2+(\frac{n}{\sqrt{3}})^2)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}}\,\frac{1}{n^3}.$$

Άρα είναι

$$\Big|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\Big| \leq \frac{9}{8\sqrt{3}}\,\frac{1}{n^3} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Πάλι, λοιπόν, από το Κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Συμπεραίνουμε ότι η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$s'(x) = t(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Προφανώς, η $s'(x)$ είναι θετική για $x<0$ και αρνητική για $x>0$. Άρα η s είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η s έχει μέγιστη τιμή στο 0 και δεν έχει ελάχιστη τιμή.
Τώρα, με σταθερό x, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(u) = \frac{1}{u^2+x^2} \qquad \text{για } u \geq 1,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε, εφαρμόζοντας το ολοκληρωτικό κριτήριο:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{1^2+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du.$$

Για $x>0$ υπολογίζουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du = x\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{x^2t^2+x^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\Big).$$

Άρα
$$\frac{1}{x}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\Big)\leq s(x)\leq\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{x}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}\Big)\qquad\text{για } x>0.$$
Από το κριτήριο παρεμβολής:
$$\lim_{x\to+\infty}s(x)=0$$
και, επειδή η s είναι άρτια,
$$\lim_{x\to-\infty}s(x)=0.$$
Άσκηση 10.1.26. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ζ κατά σημείο στο $(1,+\infty)$ και ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ για κάθε $a>1$. Αποδείξτε ότι η ζ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και
$$\zeta'(x)=-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x},\quad \zeta''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(\log n)^2}{n^x}\qquad\text{για } x>1.$$
Αποδείξτε ότι η ζ είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $(1,+\infty)$ και ότι
$$\lim_{x\to1+}\zeta(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1.$$
Λύση: Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>1$ η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ συγκλίνει ενώ για κάθε $x\leq1$ αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα, αν θέσουμε
$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\qquad\text{για } x>1,$$
ορίζουμε την συνάρτηση ζ στο $(1,+\infty)$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ συγκλίνει στην ζ κατά σημείο στο $(1,+\infty)$.

Παρένθεση: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $(1,+\infty)$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο $(1,+\infty)$. Επομένως, πρέπει να βρούμε αριθμούς M_n ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^x}|\leq M_n$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και οι M_n να είναι αρκετά μικροί ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ να συγκλίνει. Άρα πρέπει να βρούμε το μικρότερο δυνατό M_n, δηλαδή το μικρότερο φράγμα της μη-αρνητικής συνάρτησης $\frac{1}{n^x}$ στο $(1,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα της στο $(1,+\infty)$ είναι το $\lim_{x\to1+}\frac{1}{n^x}=\frac{1}{n}$. Επομένως, το $M_n=\frac{1}{n}$ είναι το ελάχιστο M_n που μπορούμε να βρούμε. Όμως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Άρα το Κριτήριο του Weierstrass αποτυγχάνει να αποδείξει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1,+\infty)$.

Συνεχίζουμε με την λύση της άσκησης:
Έστω $a>1$. Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[a,+\infty)$. Τώρα,
$$\Big|\frac{1}{n^x}\Big|=\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}\qquad\text{για κάθε } x\in[a,+\infty)$$

και
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty.$$
Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.