ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ας θυμηθούμε από την περασμένη φορά ότι ένα σύνολο M σε έναν μετρικό χώρο (X, d) είναι συμπαγές όταν: *αν έχουμε οποιαδήποτε ανοικτά σύνολα που καλύπτουν το M μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένα από αυτά τα σύνολα ώστε κι αυτά να καλύπτουν το M.*

Αποδείξαμε, επίσης, ότι: *κάθε συμπαγές είναι κλειστό και φραγμένο.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $N \subseteq M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό, τότε το N είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω τυχούσα συλλογή Σ ανοικτών συνόλων που καλύπτουν το N.
Θεωρούμε μαζί με τα σύνολα A της συλλογής Σ και το σύνολο N^c. Όλα αυτά τα σύνολα καλύπτουν ολόκληρο το X και επομένως, καλύπτουν το M. Επίσης, όλα αυτά τα σύνολα είναι ανοικτά και, επειδή το M είναι συμπαγές, μπορούμε να επιλέξουμε πεπερασμένα από αυτά ώστε να καλύπτουν το M. Διακρίνουμε, τώρα, δύο περιπτώσεις σε σχέση με το αν το N^c είναι ή δεν είναι ένα από τα πεπερασμένα σύνολα που επιλέγουμε.
Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε κάποια $A_1, \ldots, A_n$ της αρχικής συλλογής Σ ώστε αυτά μαζί με το N^c να καλύπτουν το M. Δηλαδή:

$$M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup N^c,$$

οπότε, επειδή $N \subseteq M$, έχουμε

$$N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup N^c.$$

Όμως, $N \cap N^c = \emptyset$, οπότε

$$N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Στην δεύτερη περίπτωση μπορούμε να επιλέξουμε κάποια $A_1, \ldots, A_n$ της αρχικής συλλογής Σ ώστε αυτά (χωρίς το N^c) να καλύπτουν το M. Δηλαδή:

$$M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

οπότε, επειδή $N \subseteq M$, έχουμε

$$N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα της αρχικής συλλογής Σ που καλύπτουν το N. Άρα το N είναι συμπαγές. □

Η τελευταία Πρόταση λέει ότι: *κλειστό υποσύνολο συμπαγούς είναι συμπαγές.*

Το επόμενο Θεώρημα είναι πολύ βασικό και πολύ χρήσιμο, αφού παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο χειρισμού της έννοιας της συμπάγειας, ανάγοντάς την στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) Το M είναι συμπαγές.
(ii) Κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του M.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω ότι το M είναι συμπαγές.
Έστω τυχαία ακολουθία (x_n) στο M.
Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει περιοχή $N_x(\epsilon_x)$ του x (το ϵ_x εξαρτάται από το x), η οποία περιέχει το πολύ πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Προφανώς, όλες αυτές οι περιοχές είναι ανοικτά σύνολα και καλύπτουν το M. (Κάθε $x \in M$ περιέχεται στην αντίστοιχη $N_x(\epsilon_x)$.)
Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα από αυτά τα σύνολα που καλύπτουν το M. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon_{x_1}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon_{x_n}).$$

Αφού καθεμιά από αυτές τις περιοχές περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n), η ένωσή τους και, επομένως, και το M, περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι ολόκληρη η (x_n) περιέχεται στο M.
Επομένως, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, οπότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in M$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ η $N_{x_0}(\epsilon)$ να περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Άρα η $N_{x_0}(1)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_1 \geq 1$ ώστε

$$x_{n_1} \in N_{x_0}(1).$$

Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{2})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε

$$x_{n_2} \in N_{x_0}\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{3})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε

$$x_{n_3} \in N_{x_0}\Big(\frac{1}{3}\Big).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει

$$x_{n_k} \in N_{x_0}\Big(\frac{1}{k}\Big)$$

ή, ισοδύναμα,

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k}$$

για κάθε k. Άρα $x_{n_k} \to x_0$ στον (X, d).
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω ότι κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του M.
Βήμα 1. Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε*

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε οποιοδήποτε $x_1 \in M$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_2 \notin N_{x_1}(\epsilon)$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_3 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_4 \in M$ με $x_4 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο M ώστε να ισχύει

$$d(x_n, x_m) \geq \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \text{ με } n \neq m.$$

Τώρα, όμως, πρέπει να υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία να συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$. Συνεπάγεται:

$$0 \leq d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, x_0) + d(x_{n_l}, x_0) \to 0 + 0 = 0 \qquad \text{όταν } k, l \to +\infty$$

και άρα

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \to 0 \qquad \text{όταν } k, l \to +\infty.$$

Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι ισχύει

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq \epsilon \qquad \text{για κάθε } k, l \text{ με } k \neq l.$$

Άρα ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Βήμα 2. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Δηλαδή τα σύνολα A της συλλογής είναι ανοικτά και καλύπτουν το M. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in M$ η περιοχή $N_x(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$.*

Έστω ότι δεν υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $x \in M$ ώστε η $N_x(\epsilon)$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Εφαρμόζουμε με $\epsilon = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι για κάθε n υπάρχει $x_n \in M$ ώστε η περιοχή $N_{x_n}(\frac{1}{n})$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο M, οπότε θα υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$.

Το x_0 ανήκει σε κάποιο απο τα $A \in \Sigma$. Έστω $x_0 \in A_0 \in \Sigma$. Αφού το A_0 είναι ανοικτό, συνεπάγεται ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του A_0, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε

$$N_{x_0}(\delta_0) \subseteq A_0.$$

Επιλέγουμε αρκετά μεγάλο n_k ώστε

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta_0}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\delta_0}{2}.$$

Τότε:

$$x \in N_{x_{n_k}}\left(\frac{1}{n_k}\right) \;\Rightarrow\; d(x, x_0) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0$$

δηλαδή

$$x \in N_{x_{n_k}}\left(\frac{1}{n_k}\right) \;\Rightarrow\; x \in N_{x_0}(\delta_0)$$

και, επομένως,

$$N_{x_{n_k}}\left(\frac{1}{n_k}\right) \subseteq N_{x_0}(\delta_0) \subseteq A_0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η περιοχή $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k})$ δεν πρέπει να περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$.

Άρα ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε.

Βήμα 3. Έστω τυχαία ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε, σύμφωνα με το βήμα 2, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in M$ η $N_x(\epsilon)$ να περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Σύμφωνα με το βήμα 1, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \ldots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Καθένα, όμως, από τα $N_{x_k}(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Άρα υπάρχουν αντίστοιχα σύνολα $A_1, \dots, A_n$ της Σ ώστε

$$N_{x_1}(\epsilon) \subseteq A_1, \dots, N_{x_n}(\epsilon) \subseteq A_n.$$

Άρα

$$M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.
Έστω τυχαία ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$. Η (x_n) είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$, η (x_n) έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι $a \leq x \leq b$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε ακολουθία στο $[a, b]$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, b]$. Επομένως, βάσει του Θεωρήματος, το $[a, b]$ είναι συμπαγές.