ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Συνεχίζουμε με την λύση της άσκησης 10.1.26.

Για να αποδείξουμε ότι η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, θεωρούμε οποιοδήποτε $x_0 \in (1,+\infty)$.
Κατόπιν, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $a_0 > 1$ ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$, δηλαδή ώστε

$$1 < a_0 < x_0.$$

(Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το $a_0 = \frac{1+x_0}{2}$.)
Τώρα, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{1}{n^x}$ είναι συνεχής στο $[a_0,+\infty)$ και η σύγκλιση της σειράς στην ζ είναι ομοιόμορφη στο $[a_0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι συνεχής στο $[a_0,+\infty)$. Και, επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι συνεχής στο x_0.
Άρα η ζ είναι συνεχής σε κάθε $x \in (1+\infty)$, οπότε είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$.
Τώρα θεωρούμε την σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^x}\Big)' = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-\log n}{n^x}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $(1,+\infty)$ και ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ για κάθε $a > 1$.
Θεωρούμε $x \in (1,+\infty)$ και θα εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο στην σειρά (αριθμών) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x}$.
(Το ίδιο κριτήριο εφαρμόσαμε για να αποδείξουμε την σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ για κάθε $x > 1$.)
Θα δούμε αν η συνάρτηση $f(u) = \frac{\log u}{u^x}$ είναι φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Έχουμε:

$$f'(u) = \frac{1 - x\log u}{u^{x+1}},$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e^{\frac{1}{x}}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e^{\frac{1}{x}},+\infty)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο φυσικό αριθμό n_0 ο οποίος είναι $\geq e^{\frac{1}{x}}$ και τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[n_0,+\infty)$. Επειδή $e^{\frac{1}{x}} > 1$, συνεπάγεται ότι $n_0 \geq 2$.
Επομένως, αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά αριθμών $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει. Και, σύμφωνα με το ολοκληρωτικό κριτήριο, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_{n_0}^{+\infty}\frac{\log u}{u^x}\,du < +\infty.$$

Τέλος, το $\int_2^{n_0}\frac{\log u}{u^x}\,du$ είναι ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό, φραγμένο διάστημα, οπότε είναι αριθμός και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\log u}{u^x}\,du < +\infty.$$

Για $x > 1$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{\log u}{u^x}\,du &= \frac{1}{1-x}\int_2^{+\infty}(u^{1-x})'\log u\,du = \frac{1}{1-x}\Big(-2^{1-x}\log 2 - \int_2^{+\infty}u^{-x}\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{1-x}\Big(-2^{1-x}\log 2 + \frac{2^{1-x}}{1-x}\Big) < +\infty.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για $x > 1$ η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει. Θέτουμε

$$t(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x} \qquad \text{για } x > 1$$

και έτσι ορίζουμε την συνάρτηση t στο $(1, +\infty)$ και έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x}$ συγκλίνει στην t κατά σημείο στο $(1, +\infty)$.
Κατόπιν, θεωρούμε $a > 1$ και θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[a, +\infty)$. Ισχύει

$$\left|\frac{-\log n}{n^x}\right| = \frac{\log n}{n^x} \le \frac{\log n}{n^a} \qquad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty)$$

και, όπως είδαμε,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^a} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x}$ συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και ότι ισχύει $\zeta'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. (Προσοχή: στο $x = a$ έχουμε την δεξιά πλευρική παράγωγο.)
Για να αποδείξουμε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, θεωρούμε οποιοδήποτε $x_0 \in (1, +\infty)$.
Κατόπιν, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $a_0 > 1$ ώστε το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$, δηλαδή ώστε

$$1 < a_0 < x_0.$$

Επειδή η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0, +\infty)$ και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι παραγωγίσμη στο x_0 και ότι $\zeta'(x_0) = t(x_0)$. Άρα η ζ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (1, +\infty)$ και ισχύει

$$\zeta'(x) = t(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x} \qquad \text{για } x > 1.$$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία, θεωρώντας δηλαδή την σειρά των δεύτερων παραγώγων συναρτήσεων

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{-\log n}{n^x}\Big)' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^2}{n^x},$$

αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και ότι ισχύει

$$\zeta''(x) = t'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^2}{n^x} \qquad \text{για } x > 1.$$

Μετα από αυτά, είναι προφανές ότι η ζ' είναι αρνητική και η ζ'' είναι θετική στο $(1, +\infty)$, οπότε η ζ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(1, +\infty)$.
Για να υπολογίσουμε τα όρια της ζ στο $1+$ και στο $+\infty$, εφαρμόζουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο και έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^x}\, du \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \le 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^x}\, du \qquad \text{για } x > 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} \qquad \text{για } x > 1.$$

Με το κριτήριο παρεμβολής βλέπουμε ότι

$$\lim_{x \to 1+} \zeta(x) = +\infty.$$

Όμως, το κριτήριο παρεμβολής δεν εφαρμόζεται όταν $x \to +\infty$. Παρατηρούμε, όμως, πάλι με το ολοκληρωτικό κριτήριο, ότι

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{u^x}\, du \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{2^x} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u^x}\, du \qquad \text{για } x > 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{2^x} + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \qquad \text{για } x > 1.$$

Τώρα το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι

$$\lim_{x \to +\infty} (\zeta(x) - 1) = 0$$

και άρα $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$.

Δυναμοσειρά είναι μια μια σειρά συναρτήσεων της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots .$$

Το ξ είναι το **κέντρο** της δυναμοσειράς και τα a_n είναι οι **συντελεστές** της.

Παράδειγμα: Η **μηδενική δυναμοσειρά**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n = 0 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα: Η **γεωμετρική δυναμοσειρά**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1(x-\xi)^n \begin{cases} = \frac{1}{1-(x-\xi)}, & \text{αν } |x-\xi| < 1 \\ \text{αποκλίνει}, & \text{αν } |x-\xi| \geq 1 \end{cases}.$$

Δηλαδή, η γεωμετρική δυναμοσειρά συγκλίνει στην συνάρτηση $\frac{1}{1-(x-\xi)}$ κατά σημείο στο διάστημα $(\xi-1, \xi+1)$.

Κατόπιν, για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ορίζουμε

$$\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

και έχουμε ότι

$$0 \leq \rho \leq +\infty,$$

διότι είναι $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ για κάθε n.
Τέλος, ορίζουμε

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \text{αν } 0 < \rho < +\infty \\ 0, & \text{αν } \rho = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0 \end{cases}$$

Το R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.