# ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

# ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

**Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass.** *Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία.*

*Απόδειξη.* Για απλότητα, θα δούμε την απόδειξη στην περίπτωση που η διάσταση είναι $d = 2$.
Έστω, λοιπόν, φραγμένη ακολουθία $(\mathsf{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^2$. Γράφουμε

$$\mathsf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2})$$

και έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $R > 0$ ώστε να ισχύει

$$\|\mathsf{x}_n\|_2 \leq R \qquad \text{για κάθε } n$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sqrt{{x_{n,1}}^2 + {x_{n,2}}^2} \leq R \qquad \text{για κάθε } n.$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι

$$|x_{n,1}| \leq R \quad \text{και} \quad |x_{n,2}| \leq R \qquad \text{για κάθε } n.$$

Δηλαδή, οι δυο ακολουθίες $(x_{n,1})$ και $(x_{n,2})$ είναι φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$.
Από το γνωστό Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι η $(x_{n,1})$ έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία. Δηλαδή υπάρχει κάποια $(x_{n_k,1})$ ώστε

$$x_{n_k,1} \to x_1 \qquad \text{όταν } k \to +\infty$$

για κάποιο $x_1 \in \mathbb{R}$.
Τώρα παίρνουμε τους δείκτες $n_1, n_2, n_3, \ldots$ που προέκυψαν και θεωρούμε *με τους ίδιους δείκτες* την αντίστοιχη υποακολουθία της $(x_{n,2})$. Θεωρούμε, δηλαδή, την υποακολουθία $(x_{n_k,2})$ της $(x_{n,2})$.
Η $(x_{n,2})$ είναι φραγμένη, οπότε και η υποακολουθία $(x_{n_k,2})$ είναι φραγμένη. Προσέξτε: αυτή η δεύτερη είναι ακολουθία με δείκτη $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Εφαρμόζουμε δεύτερη φορά το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$ και βρίσκουμε ότι η ακολουθία $(x_{n_k,2})$ έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία. Δηλαδή υπάρχει κάποια $(x_{n_{k_l},2})$ ώστε

$$x_{n_{k_l},2} \to x_2 \qquad \text{όταν } l \to +\infty \tag{1}$$

για κάποιο $x_2 \in \mathbb{R}$.
Τώρα επιστρέφουμε στις πρώτες συντεταγμένες και σκεφτόμαστε ότι η $(x_{n_{k_l},1})$ είναι υποακολουθία της $(x_{n_k,1})$. Άρα, επειδή $x_{n_k,1} \to x_1$ όταν $k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι

$$x_{n_{k_l},1} \to x_1 \qquad \text{όταν } l \to +\infty. \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται

$$(x_{n_{k_l},1}, x_{n_{k_l},2}) \to (x_1, x_2) \qquad \text{όταν } l \to +\infty.$$

Οπότε, αν ορίσουμε

$$\mathsf{x} = (x_1, x_2),$$

τότε

$$\mathsf{x}_{n_{k_l}} \to \mathsf{x} \qquad \text{όταν } l \to +\infty.$$

Όμως, η $(\mathsf{x}_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της $(\mathsf{x}_n)$ και η απόδειξη έχει τελειώσει. □

Τώρα έχουμε ένα βασικό αποτέλεσμα για τα συμπαγή υποσύνολα ενός Ευκλείδειου χώρου.

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

*Απόδειξη.* Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^d$.
Αν το $M$ είναι συμπαγές, τότε γνωρίζουμε ότι είναι κλειστό και φραγμένο. Αυτό ισχύει σε γενικό μετρικό χώρο και όχι μόνο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το $M$ είναι κλειστό και φραγμένο.
Για να αποδείξουμε ότι το $M$ είναι συμπαγές, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία στο $M$ έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $M$.
Έστω τυχαία ακολουθία $(\mathsf{x}_n)$ στο $M$. Επειδή το $M$ είναι φραγμένο, η $(\mathsf{x}_n)$ είναι κι αυτή φραγμένη. Από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία $(\mathsf{x}_{n_k})$ η οποία συγκλίνει. Έστω, λοιπόν,

$$\mathsf{x}_{n_k} \to \mathsf{x}$$

για κάποιο $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^d$.
Επειδή το $M$ είναι κλειστό και η $(\mathsf{x}_{n_k})$ είναι στο $M$ (αφού η $(\mathsf{x}_n)$ είναι στο $M$), συνεπάγεται ότι $\mathsf{x} \in M$. $\square$

**Παράδειγμα.** Κάθε κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^d$,

$$N_{\mathsf{x}}(r) = \{\mathsf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 \le r\},$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^d$.

**Παράδειγμα.** Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^d$.

Πρέπει να επισημάνουμε την χρησιμότητα του τελευταίου Θεωρήματος για την αναγνώριση των συμπαγών υποσυνόλων του Ευκλείδειου χώρου. Συνήθως είναι πολύ εύκολο να διακρίνουμε “με το μάτι” αν ένα σύνολο είναι φραγμένο και είναι σχετικά εύκολο να διακρίνουμε αν ένα σύνολο είναι κλειστό. Ας θυμηθούμε μερικά κριτήρια για να είναι ένα σύνολο $M$ κλειστό:

Το $M$ περιέχει όλα τα οριακά σημεία του.

Το $M$ περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

Το $M$ περιέχει όλα τα σημεία που είναι όρια ακολουθιών από το $M$.

Το $M^c$ είναι ανοικτό.

Το $M$ είναι αντίστροφη εικόνα $M = f^{-1}(F)$ μέσω συνεχούς συνάρτησης $f$ ενός κλειστού συνόλου $F$ και το πεδίο ορισμού της $f$ είναι κλειστό.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Έστω μετρικοί χώροι $(X, d)$ και $(Y, \rho)$, συμπαγές $M \subseteq X$ και συνεχής $f : M \to Y$. Τότε το $f(M)$ είναι συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Έστω τυχαία ακολουθία $(y_n)$ στο $f(M)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $(y_n)$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(M)$.
Για κάθε $n$ υπάρχει $x_n \in M$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Έτσι δημιουργείται ακολουθία $(x_n)$ στο

$M$ και, αφού το $M$ είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_k})$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $M$, δηλαδή

$$x_{n_k} \to x$$

για κάποιο $x \in M$.
Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $M$, συνεπάγεται

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(M).$$

$\square$

Η Πρόταση αυτή διατυπώνεται χαλαρά: *συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγές.*

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Κάθε μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

*Απόδειξη.* Έστω μη-κενό συμπαγές υποσύνολο $M$ του $\mathbb{R}$. Αφού το $M$ είναι μη-κενό και φραγμένο, το $M$ έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Θέτουμε

$$u = \sup M.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in M$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ και, επομένως, $x \in N_u(\epsilon)$. Άρα το $u$ είναι οριακό σημείο του $M$ και, επειδή το $M$ είναι κλειστό, $u \in M$. Άρα το $u$ είναι το μέγιστο στοιχείο του $M$.
Η απόδειξη είναι ίδια για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου: με το infimum του $M$. $\square$

Και τώρα φτάνουμε σε μια βασική εφαρμογή των συμπαγών συνόλων. Έτσι δικαιολογείται η απασχόλησή μας με αυτήν την περίπλοκη έννοια.

Η επόμενη Πρόταση γενικεύει τα γνωστά θεωρήματα φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Έστω μετρικός χώρος $(X, d)$, συμπαγές $M \subseteq X$ και συνεχής $f : M \to \mathbb{R}$. Τότε η $f$ είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.*

*Απόδειξη.* Από την προπροηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι το $f(M)$ είναι συμπαγές και από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι το $f(M)$ είναι φραγμένο και έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. $\square$

**Παράδειγμα.** Η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^3 y + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

είναι συνεχής στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$.
Επειδή ο κλειστός δίσκος

$$M = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

είναι συμπαγές σύνολο, συνεπάγεται ότι η $f$ έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στον δίσκο $M$. Δηλαδή, υπάρχουν $(x_1, y_1)$ και $(x_2, y_2)$ ώστε να ισχύει

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in M.$$