ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Έστω μια δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots$$

με ακτίνα σύγκλισης R και με $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Αν $x = \xi$, η δυναμοσειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\xi-\xi)^n = a_0 + a_1(\xi-\xi) + a_2(\xi-\xi)^2 + \cdots = a_0.$$

Άρα κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει όταν το x είναι στο κέντρο της.

Τώρα έστω $x \neq \xi$, δηλαδή $|x-\xi| > 0$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Έχουμε

$$\overline{\lim} \sqrt{|a_n(x-\xi)^n|} = \overline{\lim} \left(|x-\xi| \sqrt[n]{|a_n|}\right) = |x-\xi| \,\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\rho.$$

Αν $|x-\xi|\rho < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $|x-\xi|\rho > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

Πρώτη περίπτωση: $0 < \rho < +\infty$.

Αν $|x-\xi| < R$, τότε η σειρά συγκλίνει. Αν $|x-\xi| > R$, τότε η σειρά αποκλίνει.

Δεύτερη περίπτωση: $\rho = +\infty$.

Τότε $|x-\xi|\rho = +\infty > 1$, οπότε η σειρά αποκλίνει. Δηλαδή η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq \xi$ και, επομένως, συγκλίνει μόνο όταν $x = \xi$.

Τρίτη περίπτωση: $\rho = 0$.

Τότε $|x-\xi|\rho = 0 < 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει. Δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \neq \xi$ και, επομένως, συγκλίνει για κάθε x.

Το συμπέρασμα σε κάθε περίπτωση είναι το εξής.

Πρώτη περίπτωση: Αν $0 < R < +\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x \in (\xi-R, \xi+R)$ και αποκλίνει αν $x \notin [\xi-R, \xi+R]$. Δηλαδή το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ένα από τα $(\xi-R, \xi+R)$, $[\xi-R, \xi+R)$, $(\xi-R, \xi+R]$, $[\xi-R, \xi+R]$.

Δεύτερη περίπτωση: Αν $R = 0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = \xi$, οπότε το σύνολο σύγκλισής της είναι το διάστημα $\{\xi\} = [\xi-R, \xi+R]$.

Τρίτη περίπτωση: Αν $R = +\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty) = (\xi-R, \xi+R)$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το σύνολο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι πάντοτε διάστημα με κέντρο ξ και ακτίνα R. Μόνο στην περίπτωση $0 < R < +\infty$ υπάρχει το ερώτημα αν, ανάλογα με την εκάστοτε συγκεκριμένη δυναμοσειρά, το διάστημα σύγκλισης περιλαμβάνει και τα δύο ή ένα ή κανένα από τα δύο άκρα του.

Αν I είναι το διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς, τότε ορίζεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n \qquad \text{για } x \in I$$

και η δυναμοσειρά συγκλίνει στην f κατά σημείο στο διάστημα I.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι $R > 0$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην αντίστοιχη συνάρτηση f ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό, φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του διαστήματος σύγκλισής της I.*

Δεν θα αποδείξουμε εδώ την πρόταση αυτή. Μπορείτε να διαβάσετε την απόδειξη στο βιβλίο. Μόνο μια διευκρίνηση. Αν η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $I = (-\infty, +\infty)$, τότε η πρόταση λέει ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b]$. Αν η ακτίνα σύγκλισης R είναι τέτοια ώστε $0 < R < +\infty$, οπότε το διάστημα σύγκλισης I είναι ένα από τα $(\xi - R, \xi + R)$, $[\xi - R, \xi + R)$, $(\xi - R, \xi + R]$, $[\xi - R, \xi + R]$, τότε η πρόταση λέει ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b]$ το οποίο περιέχεται στο $(\xi - R, \xi + R)$, δηλαδή στο εσωτερικό του I.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι $R > 0$, τότε η συνάρτηση f που ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι συνεχής στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισής της I.*

Απόδειξη. Το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης I είναι το $(\xi - R, \xi + R)$ και θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$.
Έστω $\xi - R < x_0 < \xi + R$. Θεωρούμε a_0, b_0 έτσι ώστε

$$\xi - R < a_0 < x_0 < b_0 < \xi + R.$$

Τότε το $[a_0, b_0]$ περιέχεται στο εσωτερικό του I,οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a_0, b_0]$. Επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x - \xi)^n$ είναι συνεχής στο $[a_0, b_0]$, συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής στο $[a_0, b_0]$ και, επομένως, στο x_0.
Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $(\xi - R, \xi + R)$. □

Θεώρημα του Abel. *Αν η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι $R > 0$, τότε η συνάρτηση f που ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισής της I.*

Το προηγούμενο Θεώρημα λέει ότι η συνάρτηση f που ορίζεται από μια δυναμοσειρά είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς *εκτός, ίσως, από τα άκρα του*, ακόμη και εκείνα που περιέχονται στο διάστημα σύγκλισης. Το Θεώρημα του Abel λέει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής *και στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης* τα οποία περιέχονται στο διάστημα σύγκλισης.

Η απόδειξη του Θεωρήματος του Abel είναι σχετικά δύσκολη και, αν θέλει κανείς, μπορεί να την διαβάσει στο βιβλίο.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς είναι $R > 0$, τότε η συνάρτηση f που ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισής της I και ισχύει*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - \xi)^{n-1} \qquad \text{για } x \text{ στο εσωτερικό του } I.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι στο βιβλίο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την **εκθετική δυναμοσειρά**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots .$$

Έχουμε

$$\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

λόγω του γνωστού ορίου $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = +\infty$$

και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά, με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad \text{για κάθε } x.$$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad \text{για κάθε } x.$$

Άρα

$$f'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Συνεπάγεται

$$\big(e^{-x} f(x)\big)' = 0 \qquad \text{για κάθε } x$$

και άρα

$$e^{-x} f(x) = c \qquad \text{για κάθε } x$$

με κατάλληλη σταθερά c.
Επειδή $f(0) = 1$, συνεπάγεται $c = 1$, οπότε

$$f(x) = e^x \qquad \text{για κάθε } x.$$

Έχουμε, λοιπόν, την ταυτότητα

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = 1 + \frac{1}{1!}\, x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \cdots \qquad \text{για κάθε } x.$$

Γι αυτόν τον λόγο η δυναμοσειρά ονομάζεται εκθετική δυναμοσειρά.

Παράδειγμα: Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ισχύει

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{4!}\, x^4 - \frac{1}{6!}\, x^6 + \cdots \qquad \text{για κάθε } x$$

και

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \frac{1}{1!}\, x - \frac{1}{3!}\, x^3 + \frac{1}{5!}\, x^5 - \cdots \qquad \text{για κάθε } x$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Έχουμε

$$\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

λόγω του γνωστού ορίου $\sqrt[n]{n} \to 1$.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = 1$$

και το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$.
Για $x = 1$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

και αποκλίνει στο $+\infty$.
Για $x = -1$ η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

και συγκλίνει.
Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.
Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά, με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1).$$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-1, 1).$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad \text{για κάθε } x \in (-1, 1).$$

Συνεπάγεται

$$f(x) = -\log(1 - x) + c \qquad \text{για κάθε } x \in (-1, 1)$$

με κατάλληλη σταθερά c.
Επειδή $f(0) = 0$, συνεπάγεται $c = 0$, οπότε

$$f(x) = -\log(1 - x) \qquad \text{για κάθε } x \in (-1, 1)$$

Έχουμε, λοιπόν, την ταυτότητα

$$\log \frac{1}{1 - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad \text{για κάθε } x \in (-1, 1). \tag{1}$$

Γι αυτόν τον λόγο η δυναμοσειρά ονομάζεται **λογαριθμική δυναμοσειρά**.
Η ισότητα (1) δεν μας λέει τί γίνεται όταν $x = -1$. Μπορούμε να πάμε ένα βήμα παραπέρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Abel. που μας λέει ότι η f είναι συνεχής

στο διάστημα $[-1,1)$, δηλαδή και στο σημείο $x=-1$. Εκμεταλλευόμενοι τον τύπο της $f(x)$ για $x \in (-1,1)$, έχουμε ότι

$$f(-1) = \lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \log \frac{1}{1-x} = \log \frac{1}{2} = -\log 2.$$

Όμως,

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

ή, ισοδύναμα,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

Συμπεραίνουμε, επίσης, ότι η ισότητα (1) ισχύει και για $x=-1$. Δηλαδή,

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1).$$