ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Έχουμε δει ότι

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$

Τώρα, για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{[0,+\infty)} &= \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0,+\infty)\} = \sup\left\{\frac{x}{1+nx} \,\middle|\, x \in [0,+\infty)\right\} \\ &= \sup\left[0,\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

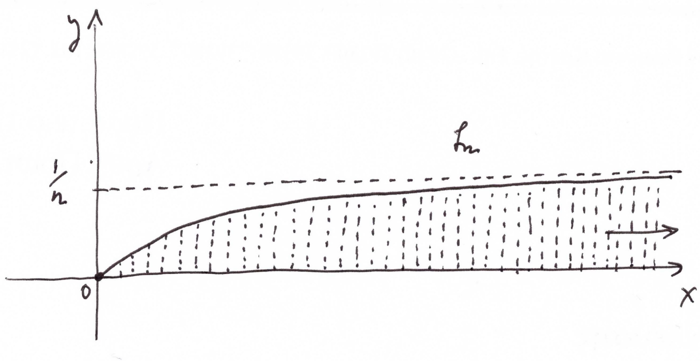
Η ισότητα $\{\frac{x}{1+nx} \,|\, x \in [0,+\infty)\} = [0,\frac{1}{n})$ προκύπτει από το ότι η $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$.
Άρα

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} \to 0,$$

οπότε

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$

Στο γράφημα φαίνεται ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $[0,+\infty)$, το supremum των $|f_n(x) - 0|$ είναι $\frac{1}{n}$ και αυτό το supremum "προσεγγίζεται" όταν το x απομακρύνεται προς τα δεξιά.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{n}{x+n^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει

$$f_n(x) = \frac{n}{x+n^2} \to 0 \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$

Τώρα, για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{[0,+\infty)} &= \sup\{|f_n(x)| \mid x \in [0,+\infty)\} = \sup\left\{\frac{n}{x+n^2} \,\middle|\, x \in [0,+\infty)\right\} \\ &= \sup\left(0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

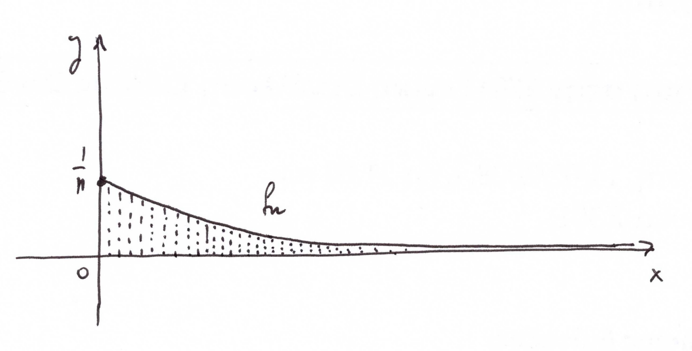
Η ισότητα $\{\frac{n}{x+n^2} \mid x \in [0,+\infty)\} = (0, \frac{1}{n}]$ προκύπτει από το ότι η $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$.
Άρα

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} \to 0,$$

οπότε

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0 \qquad \text{στο } [0,+\infty).$$

Στο γράφημα φαίνεται ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $[0,+\infty)$, το supremum των $|f_n(x) - 0|$ είναι $\frac{1}{n}$ και αυτό το supremum είναι η μέγιστη τιμή $f_n(0)$ της συνάρτησης στο $[0,+\infty)$.



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ και με τύπο

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \end{cases} \qquad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Άρα

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \qquad \text{στο } [0,+\infty),$$

όπου f είναι η συνάρτηση στο $[0,+\infty)$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

Τώρα, για κάθε n έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{1+nx}, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

οπότε

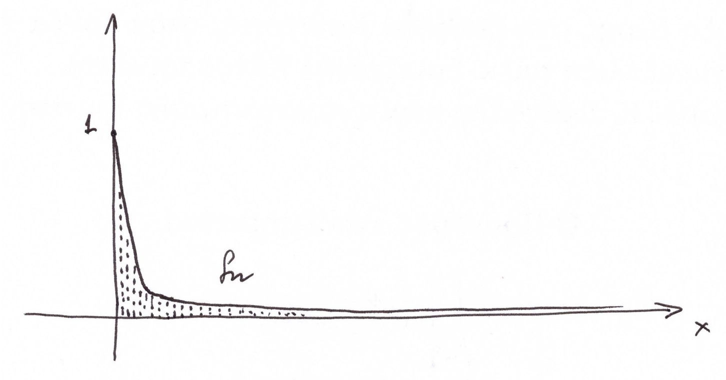
$$\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in[0,+\infty)\}=\{0\}\cup\Big\{\frac{1}{1+nx}\,\Big|\,x\in(0,+\infty)\Big\}=\{0\}\cup(0,1)=[0,1)$$

και, επομένως,

$$\|f_n-f\|_{[0,1]}=\mathsf{sup}\{|f_n(x)-f(x)|\,|\,x\in[0,1]\}=1.$$

Άρα δεν ισχύει $\|f_n-f\|_{[0,+\infty)}\to 0$, οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

Δείτε στο γράφημα ότι, με σταθερό n, μεταβάλλοντας το x στο $[0,+\infty)$, το supremum των $|f_n(x)-f(x)|$ είναι 1 και αυτό το supremum "προσεγγίζεται" όταν το x πλησιάζει το 0 από τα δεξιά (αλλά όχι όταν $x=0$).



Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $[0,1]$ και με τύπο

$$f_n(x)=\begin{cases}nx, & \text{αν } 0\le x\le\frac{1}{n}\\ \frac{1}{nx}, & \text{αν } \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

Έχουμε δει ότι

$$f_n\overset{\text{κ.σ.}}{\to}0\qquad\text{στο } [0,1].$$

Για κάθε n έχουμε ότι

$$|f_n(x)|=f_n(x)\le 1\qquad\text{για κάθε } x\in[0,1]$$

και

$$\Big|f_n\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big|=1.$$

Άρα για κάθε n το σύνολο $\{|f_n(x)|\,|\,x\in[0,1]\}$ έχει μέγιστο στοιχείο το 1, οπότε

$$\|f_n\|_{[0,1]}=1.$$

Άρα δεν ισχύει $\|f_n\|_{[0,1]}\to 0$, οπότε η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε n την συνάρτηση f_n με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τύπο

$$f_n(x)=\frac{\mathsf{sin}(nx)}{n}\qquad\text{για κάθε } x.$$

Έχουμε δει ότι

$$f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Για κάθε n βλέπουμε ότι ισχύει

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } x,$$

οπότε

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n}$$

και, επομένως,

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} \to 0.$$

Άρα

$$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν χρειάστηκε να υπολογίσουμε ακριβώς την τιμή της ομοιόμορφης απόστασης $\|f_n\|_{\mathbb{R}}$. Αποδείξαμε μόνο την ανισότητα $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n}$ και αυτό ήταν αρκετό για να συμπεράνουμε ότι $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \to 0$.

Γενικότερα, αν για μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) και μια συνάρτηση f μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε n ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \qquad \text{για κάθε } x \in A,$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία αριθμών η οποία τείνει στο 0, τότε συνεπάγεται

$$\|f_n - f\|_A \leq a_n$$

και, επομένως,

$$\|f_n - f\|_A \to 0$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \qquad \text{στο } A.$$

Ξαναγυρνώντας στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε, αν θέλουμε, να υπολογίσουμε ακριβώς την τιμή της ομοιόμορφης απόστασης $\|f_n\|_{\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ότι $|f_n(\frac{\pi}{2n})| = \frac{1}{n}$ και, επειδή ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε x, συνεπάγεται ότι το $\frac{1}{n}$ είναι το μέγιστο στοιχείο του συνόλου $\{|f_n(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, οπότε $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n}$.

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο μάθημα απ' ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στο $\xi \in A$, τότε και η f είναι συνεχής στο ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε και η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $\xi \in A$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A, υπάρχει κάποιο n_0 ώστε

$$n \geq n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ειδικώτερα, για $n = n_0$ είναι:

$$\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1}$$

Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\le \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A. \end{aligned} \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) συνεπάγεται ότι

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. □

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$.
Θα παραλείψουμε την απόδειξη του ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και θα το θεωρήσουμε δεδομένο. (Η απόδειξη υπάρχει στο βιβλίο.)
Τώρα, για κάθε n ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_{[a,b]} \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b],$$

οπότε

$$\Big| \int_a^b f_n - \int_a^b f \Big| = \Big| \int_a^b (f_n - f)\, dx \Big| \le \|f_n - f\|_{[a,b]}(b - a)$$

και, επειδή $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$. □