ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ

Θα γυρίσουμε πίσω για να κάνουμε μια απόδειξη που είχαμε παραλείψει σε κάποιο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a,b], x \neq \xi \\ 1, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι

$$\int_a^b f = 0.$$

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που

$$a < \xi < b.$$

Οι άλλες περιπτώσεις, $\xi = a$ και $\xi = b$, είναι παρόμοιες (και ελαφρά απλούστερες) και μπορείτε να τις διαβάσετε στο βιβλίο.
Έστω $\epsilon > 0$. Παίρνουμε ένα $\delta > 0$ αρκετά μικρό, την τιμή του οποίου θα καθορίσουμε σε λίγο, και θεωρούμε την συγκεκριμένη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ του $[a,b]$ με

$$x_0 = a, \quad x_1 = \xi - \delta, \quad x_2 = \xi + \delta, \quad x_3 = b.$$

Τότε, η f είναι σταθερή 0 στα διαστήματα $[x_0, x_1]$ και $[x_2, x_3]$, οπότε

$$l_1 = u_1 = 0, \quad l_3 = u_3 = 0,$$

και στο $[x_1, x_2]$ έχει ακριβώς δύο τιμές, τις 0 και 1, οπότε

$$l_2 = 0, \ u_2 = 1.$$

Επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_2) = 0,$$

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_3 - x_2) = x_2 - x_1 = 2\delta.$$

Άρα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 2\delta.$$

Τώρα μπορούμε να πούμε ότι, αν επιλέξουμε το δ ώστε $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$, θα έχουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$$

και θα έχουμε αποδείξει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Πρέπει, πάντως, να προσέξουμε επιπλέον να ισχύει $a < \xi - \delta$ και $\xi + \delta < b$ ή, ισοδύναμα, $\delta < \xi - a$ και $\delta < b - \xi$. Άρα πρέπει να επιλέξουμε το δ ώστε $0 < \delta < \min\{\frac{\epsilon}{2}, \xi - a, b - \xi\}$.
Τώρα, για την διαμέριση Δ που βρήκαμε ισχύει $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 0$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 2\delta$ και, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, έχουμε

$$0 = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 2\delta < \epsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$0 \leq \int_a^b f < \epsilon$$

και, επομένως, $\int_a^b f = 0$.

Τώρα θα συνεχίσουμε την παρουσίαση της θεωρίας χωρίς να αποδεικνύουμε (όπως έχουμε ήδη εξηγήσει) τις διάφορες ιδιότητες του ολοκληρώματος. Μόνο περιστασιακά θα κάνουμε κάποιες αποδείξεις αν κρίνουμε ότι προσφέρουν κάποιες νέες ιδέες.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και αριθμός λ. Τότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Οι ισότητες που αποδείχθηκαν στις δύο τελευταίες Προτάσεις συνδυάζονται στην

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Αυτή η ισότητα εύκολα γενικεύεται με επαγωγή για περισσότερους από δυο όρους:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n) = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \cdots + \lambda_n \int_a^b f_n,$$

αν όλες οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι άμεση γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος και θα χρησιμοποιηθεί αμέσως στην απόδειξη της επόμενης Πρότασης.

Παράδειγμα. Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_n$ διαφορετικά σημεία του $[a, b]$ και f η οποία είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$ εκτός σ' αυτά τα n σημεία. Θα δούμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι

$$\int_a^b f = 0.$$

Συγκεκριμένα, έστω

$$a \leq \xi_1 < \ldots < \xi_n \leq b$$

και έστω ότι

$$f(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b] \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

και

$$f(\xi_j) = c_j \neq 0 \qquad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση

$$f_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a, b], x \neq \xi_j \\ 1, & \text{αν } x = \xi_j \end{cases}$$

Αν $x \in [a, b]$ και $x \neq \xi_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, τότε $f(x) = 0$ και $f_j(x) = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Άρα

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = c_1 0 + \cdots + c_n 0 = 0 = f(x).$$

Αν $x \in \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, τότε $x = \xi_{j_0}$ για κάποιον $j_0 = 1, \ldots, n$, οπότε $f(x) = c_{j_0}$ και $f_{j_0}(x) = 1$ και $f_j(x) = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ με $j \neq j_0$. Άρα

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_{j_0} f_{j_0}(x) + \cdots + c_n f_n(x) = c_1 0 + \cdots + c_{j_0} 1 + \cdots + c_n 0 = c_{j_0} = f(x).$$

Άρα ισχύει

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b]$$

ή, ισοδύναμα,

$$f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

Επειδή κάθε f_j είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f_j = 0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f = c_1 \int_a^b f_1 + \cdots + c_n \int_a^b f_n = c_1 0 + \cdots + c_n 0 = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και g η οποία ταυτίζεται με την f στο $[a, b]$ εκτός σε πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h = g - f$ η οποία είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$ εκτός στα πεπερασμένου πλήθους σημεία στα οποία η g διαφέρει από την f. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b h = 0$.
Επειδή $g = f + h$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b g = \int_a^b (f + h) = \int_a^b f + \int_a^b h = \int_a^b f.$$

□

Η Πρόταση διατυπώνεται και ως εξής: *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη (πχ είναι συνεχής ή μονότονη) σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε και η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων ξεχωριστά.* Για παράδειγμα, ο τύπος $\int_a^b fg = \int_a^b f \int_a^b g$ **δεν ισχύει γενικά**.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $a < c < b$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $a \le c < d \le b$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c, d]$.*

Είναι λίγο - πολύ γνωστό πότε λέμε μια συνάρτηση τμηματικά σταθερή ή τμηματικά συνεχή ή τμηματικά μονότονη σε ένα διάστημα. Δείτε τους τυπικούς ορισμούς στο βιβλίο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι τμηματικά σταθερή ή τμηματικά συνεχής ή τμηματικά μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Σχεδόν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες εφαρμογές είναι είτε τμηματικά συνεχείς είτε τμηματικά μονότονες και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα στο οποίο είναι φραγμένες.