ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΛΗΜΜΑ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

[α] *Τότε $\int_a^b f \geq 0$.*

[β] *Αν $\int_a^b f = 0$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε x στο οποίο η f είναι συνεχής. Ειδικώτερα, αν $\int_a^b f = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. [α] Το 0 είναι κάτω φράγμα της f στο $[a,b]$. Άρα το 0 είναι μικρότερο ή ίσο του μέγιστου κάτω φράγματος της f στο $[a,b]$. Δηλαδή, αν $l = \inf\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, τότε $0 \leq l$. Σύμφωνα με ένα Λήμμα που είχαμε αποδείξει στο δεύτερο μάθημα, ισχύει

$$l(b-a) \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Άρα

$$\int_a^b f \geq l(b-a) \geq 0.$$

[β] Έστω $\int_a^b f = 0$.
Έστω x_0 ένα σημείο συνέχειας της f και έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι

$$f(x_0) > 0.$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε αριθμό κ ώστε

$$0 < \kappa < f(x_0).$$

(Για παράδειγμα, τον $\kappa = \frac{f(x_0)}{2}$.)
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $[c,d] \subseteq [a,b]$ με $d-c > 0$ που περιέχει το x_0 και ώστε να ισχύει

$$f(x) \geq \kappa \qquad \text{για κάθε } x \in [c,d].$$

Δηλαδή, ισχύει $f(x) - \kappa \geq 0$ για κάθε $x \in [c,d]$, οπότε

$$\int_c^d (f - \kappa) \geq 0.$$

Άρα

$$\int_c^d f - \int_c^d \kappa \geq 0$$

και, επομένως,

$$\int_c^d f \geq \kappa(d-c) > 0.$$

Τώρα διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.
Έστω $a < c < d < b$. Από το ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, c]$, συνεπάγεται $\int_a^c f \geq 0$. Ομοίως, $\int_d^b f \geq 0$. Άρα

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq 0 + \int_c^d f + 0 > 0.$$

Έστω $a < c < d = b$. Όπως πριν, είναι $\int_a^c f \geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f \geq 0 + \int_c^d f > 0.$$

Έστω $a = c < d < b$. Όπως πριν, είναι $\int_d^b f \geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f = \int_c^d f + \int_d^b f \geq \int_c^d f + 0 > 0.$$

Τέλος, αν $c = a$ και $d = b$, τότε $\int_a^b f = \int_c^d f > 0$.
Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει $\int_a^b f > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις περιέχουν τα βασικά εργαλεία εκτίμησης ολοκληρωμάτων: τα χρησιμοποιούμε στις περιπτώσεις που δεν βολεύει ή δεν είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός των ολοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

[α] *Αν ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f \leq u(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f = u(b - a)$, τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

[β] *Αν ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f \geq l(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f = l(b - a)$, τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

[γ] *Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\left| \int_a^b f \right| = M(b - a)$, τότε είτε ισχύει $f(x) = M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) = -M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f, g ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

[α] *Τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

[β] *Αν $\int_a^b f = \int_a^b g$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ σε κάθε κοινό σημείο συνέχειας x των f, g.*
Ειδικώτερα, αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε οι f, g ταυτίζονται στο $[a, b]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Αν $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$, τότε είτε ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. Δεχόμαστε, παραλείποντας την απόδειξή του, ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, ισχύει
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b],$$
οπότε
$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$
Άρα
$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|.$$
Αν $\big| \int_a^b f \big| = \int_a^b |f|$, τότε είναι είτε $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ είτε $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x) = |f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x) = -|f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \leq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Άσκηση 6.4.2. *Έστω $[c,d] \subseteq [a,b]$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f \geq \int_c^d f$.*

Λύση: Μια πρώτη περίπτωση είναι όταν $a < c < d < b$.
Επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,c]$, συνεπάγεται
$$\int_a^c f \geq 0.$$
Ομοίως, επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [d,b]$, συνεπάγεται
$$\int_d^b f \geq 0.$$
Άρα
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq 0 + \int_c^d f + 0 = \int_c^d f.$$
Οι άλλες τρεις περιπτώσεις είναι όταν $a = c < d < b$, $a < c < d = b$ και $a = c < d = b$ και λύνονται με τον ίδιο τρόπο (και απλούστερα).

Άσκηση 6.4.7. *Βρείτε τα όρια:*
$$(i) \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad (ii) \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

Λύση: Τα συγκεκριμένα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν ακριβώς. Προτιμάμε, όμως, στην παρούσα φάση να δούμε πώς θα εκτιμήσουμε τα ολοκληρώματα χωρίς να τα υπολογίσουμε ακριβώς.

(i) Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα και ένα άνω φράγμα της συνάρτησης $\frac{t}{1+t^2}$ στο διάστημα $[x, x+\sqrt{x}]$. Και, επειδή προτιμάμε όσο το δυνατό καλύτερες εκτιμήσεις, θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα και ένα άνω φράγμα τα οποία να είναι όσο το δυνατό κοντύτερα το ένα στο άλλο: *τα καταλληλότερα τέτοια φράγματα είναι η ελάχιστη και η*

μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα.
Υπολογίζουμε την παράγωγο
$$\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$
της $\frac{t}{1+t^2}$ και βλέπουμε ότι είναι >0 στο διάστημα $(-1,1)$ και <0 στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.
Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x\to+\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x\geq 1$, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x,x+\sqrt{x}]$. Άρα η ελαχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό είναι οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος, και έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\leq\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{x}{1+x^2}\qquad \text{για κάθε } t\in[x,x+\sqrt{x}].$$

Άρα
$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\sqrt{x}\leq\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt\leq\frac{x}{1+x^2}\sqrt{x}.$$
Αυτό ισχύει για κάθε $x\geq 1$ και τώρα με την ιδιότητα παρεμβολής βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt=0.$$

(ii) Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x\to 0+$, θεωρούμε ότι $0<x\leq 1$, οπότε η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1-x,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,1+x]$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο $[1-x,1+x]$ είναι η τιμή της στο 1 και η ελάχιστη τιμή της στο $[1-x,1+x]$ είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα άκρα $1-x$ και $1+x$. Με μια απλή σύγκριση βρίσκουμε ότι η μικρότερη από τις δυο τιμές στα άκρα είναι η τιμή στο $1-x$ και συμπεραίνουμε ότι, αν $0<x\leq 1$, τότε ισχύει
$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2}\leq\frac{t}{1+t^2}\leq\frac{1}{2}\qquad \text{για κάθε } t\in[1-x,1+x].$$
Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2}\,2x\leq\int_{1-x}^{1+x}\frac{t}{1+t^2}\,dt\leq\frac{1}{2}\,2x$$

και, επομένως,
$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2}\leq\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{t}{1+t^2}\,dt\leq\frac{1}{2}$$
για κάθε x με $0<x\leq 1$.
Από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}.$$

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να αποδείξουμε το ίδιο όριο.
Παρατηρούμε ότι, όταν το $x>0$ είναι πολύ κοντά στο 0, τότε το διάστημα $[1-x,1+x]$,

το οποίο περιέχει το 1, είναι πολύ μικρό, οπότε κάθε t στο διάστημα αυτό είναι περίπου ίσο με 1 και, επομένως, θα ισχύει

$$\frac{t}{1+t^2} \approx \frac{1}{2}.$$

Άρα, όταν το $x > 0$ είναι πολύ κοντα στο 0, θα έχουμε

$$\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt \approx \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Επομένως, αναμένουμε ότι το ζητούμενο όριο θα είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ και ξεκινάμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt \to \frac{1}{2} \qquad \text{όταν } x \to 0+ \tag{2}$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2} \to 0 \qquad \text{όταν } x \to 0+\,.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dt.$$

Πώς σκεφτήκαμε να αντικαταστήσουμε τον αριθμό $\frac{1}{2}$ με την παράσταση $\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{1}{2}\,dt$; Μα κάναμε ήδη τον υπολογισμό πιο πάνω στο τέλος της σχέσης (1).
Άρα

$$\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\Big)\,dt,$$

οπότε

$$\Big|\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2}\Big| \le \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \Big|\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\Big|\,dt. \tag{3}$$

Τώρα κάνουμε πράξεις και βλέπουμε ότι

$$\Big|\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\Big| = \frac{(t-1)^2}{2(1+t^2)} \le \frac{(t-1)^2}{2} \qquad \text{για κάθε } t \in [1-x, 1+x],$$

οπότε η (3) συνεπάγεται ότι

$$\Big|\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2}\Big| \le \frac{1}{4x}\int_{1-x}^{1+x} (t-1)^2\,dt = \frac{1}{4x}\int_{-x}^{x} u^2\,du = \frac{x^2}{6}.$$

Άρα αποδείξαμε την (2).