ΑΝΑΛΥΣΗ 2

Μ. Παπαδημητράκης.

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ξεκινάμε με ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα.

Έστω ένας φυσικός $d \geq 2$. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \big\{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\big\}.$$

Συμβολίζουμε

$$\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$$

το οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}^d$.

Είναι γνωστό ότι το $\mathbb{R}^2$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων ενός οποιουδήποτε επιπέδου και το $\mathbb{R}^3$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων του χώρου.

Αν $d = 1$, θεωρούμε $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, οπότε το $\mathbb{R}^1$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων μιας οποιασδήποτε ευθείας.

Αν x, y είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία της ευθείας είναι ίση με την ποσότητα

$$|x - y|.$$

Αν $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathsf{y} = (y_1, y_2)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του επιπέδου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Τέλος, αν $\mathsf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathsf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του χώρου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Για κάθε $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε την **Ευκλείδεια νόρμα** του x στον $\mathbb{R}^d$ με τον τύπο

$$\|\mathsf{x}\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2}.$$

Επίσης, για κάθε $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d), \mathsf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε το **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** των x, y στον $\mathbb{R}^d$ με τον τύπο

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

Προφανώς, ισχύει

$$\langle \mathsf{x}, \mathsf{x} \rangle = {x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2 = {\|\mathsf{x}\|_2}^2.$$

Επίσης,

$$\|\mathsf{x}\|_2 \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \|\mathsf{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \mathsf{x} = 0$$

όπου $0 = (0, \ldots, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^d$.

Ανισότητα του Cauchy. *Για κάθε* $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*

$$|\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle| \leq \|\mathsf{x}\|_2 \|\mathsf{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Αν $\mathsf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και $\mathsf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\|t\mathsf{x} + \mathsf{y}\|_2{}^2 &= (tx_1 + y_1)^2 + \cdots + (tx_d + y_d)^2 \\
&= t^2({x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2) + 2t(x_1y_1 + \cdots + x_dy_d) + ({y_1}^2 + \cdots + {y_d}^2) \qquad (1) \\
&= t^2\|\mathsf{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle + \|\mathsf{y}\|_2{}^2.
\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει

$$t^2\|\mathsf{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle + \|\mathsf{y}\|_2{}^2 \geq 0 \qquad (2)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε η διακρίνουσα της παράστασης στο αριστερό μέρος της (2) είναι ≤ 0.

Δηλαδή, είναι

$$4\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle^2 - 4\|\mathsf{x}\|_2{}^2\|\mathsf{y}\|_2{}^2 \leq 0$$

και, επομένως, $|\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle| \leq \|\mathsf{x}\|_2\|\mathsf{y}\|_2$.

Ας δούμε, όμως, και μια δεύτερη απόδειξη αυτής της σημαντικής ανισότητας.

Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι

$$\|\mathsf{x}\|_2 = \|\mathsf{y}\|_2 = 1.$$

Δηλαδή,

$${x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2 = {y_1}^2 + \cdots + {y_d}^2 = 1.$$

Τότε

$$|\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle| \leq |x_1y_1| + \cdots + |x_dy_d| \leq \frac{{x_1}^2 + {y_1}^2}{2} + \cdots + \frac{{x_d}^2 + {y_d}^2}{2} = 1.$$

Κατόπιν, υποθέτουμε ότι

$$\|\mathsf{x}\|_2 > 0, \qquad \|\mathsf{y}\|_2 > 0.$$

Θεωρούμε τα *κανονικοποιημένα* στοιχεία $\frac{\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2}$ και $\frac{\mathsf{y}}{\|\mathsf{y}\|_2}$ του $\mathbb{R}^d$, για τα οποία ισχύει

$$\left\|\frac{\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2}\right\|_2 = \left\|\frac{\mathsf{y}}{\|\mathsf{y}\|_2}\right\|_2 = 1$$

και άρα, βάσει αυτού που μόλις αποδείξαμε, έχουμε

$$\left|\left\langle \frac{\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2}, \frac{\mathsf{y}}{\|\mathsf{y}\|_2}\right\rangle\right| \leq 1.$$

Τώρα, παραγοντοποιώντας τους αριθμούς $\|\mathsf{x}\|_2, \|\mathsf{y}\|_2$ από το εσωτερικό γινόμενο, προκύπτει η ανισότητα του Cauchy.

Τέλος, αν $\|\mathsf{x}\|_2 = 0$ ή $\|\mathsf{y}\|_2 = 0$, τότε $\mathsf{x} = 0$ ή $\mathsf{y} = 0$, οπότε $\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle = 0$ και άρα πάλι ισχύει η ανισότητα του Cauchy ως $0 \leq 0$. □

Τριγωνική ανισότητα. *Για κάθε* $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*

$$\|\mathsf{x} + \mathsf{y}\|_2 \leq \|\mathsf{x}\|_2 + \|\mathsf{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την (1) με $t = 1$ και έχουμε

$$\|\mathsf{x} + \mathsf{y}\|_2{}^2 = \|\mathsf{x}\|_2{}^2 + 2\langle \mathsf{x}, \mathsf{y}\rangle + \|\mathsf{y}\|_2{}^2.$$

Από την ανισότητα του Cauchy συνεπάγεται

$$\|\mathsf{x} + \mathsf{y}\|_2{}^2 \leq \|\mathsf{x}\|_2{}^2 + 2\|\mathsf{x}\|_2\|\mathsf{y}\|_2 + \|\mathsf{y}\|_2{}^2 = \big(\|\mathsf{x}\|_2 + \|\mathsf{y}\|_2\big)^2.$$

Άρα $\|\mathsf{x} + \mathsf{y}\|_2 \leq \|\mathsf{x}\|_2 + \|\mathsf{y}\|_2$. □

Ορίζουμε την **Ευκλείδεια απόσταση** ανάμεσα στα $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^d$ με τον τύπο

$$d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_2$$

Η $d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_2$ αποτελεί γενίκευση στις d διαστάσεις της γνωστής Ευκλείδειας απόστασης στις διαστάσεις 1, 2 και 3 που αναφέραμε στην αρχή.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε* $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει:*
[α] $0 \leq d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) < +\infty$.
[β] $d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathsf{x} = \mathsf{y}$.
[γ] $d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = d_2(\mathsf{y}, \mathsf{x})$.
[δ] $d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \leq d_2(\mathsf{x}, \mathsf{z}) + d_2(\mathsf{z}, \mathsf{y})$.

Απόδειξη. Οι [α], [β], [γ] είναι προφανείς.
Η [δ] προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα ως εξής:

$$d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_2 = \|(\mathsf{x} - \mathsf{z}) + (\mathsf{z} - \mathsf{y})\|_2 \leq \|\mathsf{x} - \mathsf{z}\|_2 + \|\mathsf{z} - \mathsf{y}\|_2 = d_2(\mathsf{x}, \mathsf{z}) + d_2(\mathsf{z}, \mathsf{y}).$$

□

Το [γ] της Πρότασης εκφράζει τη **συμμετρία** και το [δ] την **τριγωνική ανισότητα** της Ευκλείδειας απόστασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Εστω X οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο. Ονομάζουμε* **μετρική** *στο X κάθε συνάρτηση d ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ και με πραγματικές τιμές*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $d(x, y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(ii) *Για κάθε* $x, y \in X$ *ισχύει:* $d(x, y) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = y$.
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.
Λέμε ότι το ζευγάρι (X, d) αποτελεί έναν **μετρικό χώρο** *ή ότι "το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με τη μετρική d" ή, απλώς, λέμε "το σύνολο X με τη μετρική d". Επίσης, την τιμή $d(x, y)$ στο ζευγάρι (x, y) την ονομάζουμε* **απόσταση** *των x, y.*

Η $d_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που έχουμε ήδη ορίσει με τύπο $d_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\|_2$ ονομάζεται **Ευκλείδεια μετρική** στον $\mathbb{R}^d$. Το περιεχόμενο της προηγούμενης Πρότασης είναι ακριβώς το ότι η d_2 είναι μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^d, d_2)$ ονομάζεται d-**διάστατος Ευκλείδειος χώρος**. Όταν λέμε **ο Ευκλείδειος χώρος** $\mathbb{R}^d$ εννοούμε το $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική.

Παράδειγμα. Έστω *οποιοδήποτε* μη-κενό σύνολο X και η συνάρτηση $d_\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$d_\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_δ έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.
Οι (i), (ii), (iii) είναι προφανείς.
Αν $d_\delta(x, y) = 0$, η ανισότητα $d_\delta(x, y) \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$ ισχύει, διότι $d_\delta(x, z) \geq 0$

και $d_\delta(z, y) \geq 0$. Αν $d_\delta(x, y) = 1$, τότε $x \neq y$, οπότε ένα τουλάχιστον από τα x, y είναι διαφορετικό από το z και, επομένως, ένας τουλάχιστον από τους $d_\delta(x, z)$, $d_\delta(z, y)$ είναι ίσος με 1 (και ο άλλος είναι ≥ 0). Άρα $d_\delta(x, y) = 1 \leq d_\delta(x, z) + d_\delta(z, y)$.
Η d_δ ονομάζεται **διακριτή μετρική** στο X.

Παράδειγμα. Θεωρούμε οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A και το σύνολο $B(A)$ όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$B(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη }\}.$$

Έχουμε ήδη ορίσει την *ομοιόμορφη απόσταση*

$$\|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in A\}$$

οποιωνδήποτε συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν $f, g \in B(A)$, δηλαδή αν οι f, g είναι και φραγμένες στο A, τότε

$$0 \leq \|f - g\|_A < +\infty.$$

Πράγματι, αν υπάρχουν $M, N \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N$$

για κάθε $x \in A$ και, επομένως, $\|f - g\|_A \leq M + N < +\infty$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$d_A : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$d_A(f, g) = \|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in A\}.$$

Είναι φανερό ότι η d_A ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μιας μετρικής στο $B(A)$.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι ισχύει

$$\|f - g\|_A \leq \|f - h\|_A + \|h - g\|_A$$

για κάθε $f, g, h \in B(A)$. Άρα η d_A είναι μετρική στο $B(A)$. Η d_A ονομάζεται **ομοιόμορφη μετρική** στο $B(A)$ ή **μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης** στο A.

Σε έναν μετρικό χώρο (X, d) ορίζεται η έννοια της **περιοχής**. Αν $x \in X$ και $r > 0$, ονομάζουμε r-**περιοχή** του x ή περιοχή **κέντρου** x και **ακτίνας** r το σύνολο

$$N_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

Είναι προφανές ότι *κάθε r-περιοχή περιέχει τουλάχιστον το κέντρο της.*

Στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική οι περιοχές είναι γνωστά σύνολα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $r > 0$ έχουμε

$$N_x(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < r\} = (x - r, x + r).$$

Στο $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική η περιοχή κέντρου $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$N_{\mathsf{x}}(r) = \{\mathsf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 < r\},$$

δηλαδή ο δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r (χωρίς τη συνοριακή περιφέρειά του).

Στο $\mathbb{R}^3$ η περιοχή κέντρου $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$N_{\mathsf{x}}(r) = \{\mathsf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathsf{y} - \mathsf{x}\|_2 < r\},$$

δηλαδή η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r (χωρίς τη συνοριακή επιφάνειά της).

Είναι φανερό ότι από τα παραδείγματα του δίσκου και της μπάλας στα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντιστοίχως, προέρχονται οι όροι *κέντρο* και *ακτίνα* στη γενική περίπτωση των περιοχών σε μετρικούς χώρους. Μάλιστα, και στην περίπτωση του γενικού $\mathbb{R}^d$ χρησιμοποιούμε τον όρο *(d-διάστατη) μπάλα κέντρου* x *και ακτίνας* r για την περιοχή $N_{\mathsf{x}}(r)$.

Παράδειγμα. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ. Οι μόνες τιμές της d_δ είναι 0 και 1. Άρα για κάθε $x \in X$ είναι

$$N_x(r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < r \leq 1 \\ X, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$